# ELEMENTY RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Agnieszka Rossa

## Szkic wykładu

## Przykład 1 (wprowadzający)

W 1725 r. znani matematycy szwajcarscy, Daniel i Nicolas Bernoulli udali się do Petersburga, gdzie odkryli pewną ciekawostkę, nazwaną potem **paradoksem petersburskim**.

## Przykład 1 (wprowadzający)

W 1725 r. znani matematycy szwajcarscy, Daniel i Nicolas Bernoulli udali się do Petersburga, gdzie odkryli pewną ciekawostkę, nazwaną potem **paradoksem petersburskim**.

1. Rozpatrzmy pewną grę losową, polegającą na rzucaniu monetą. Przypuśćmy, że gracz opłaca swój udział w grze pewną sumą pieniędzy $K$ (np. wyrażoną w \$).

## Przykład 1 (wprowadzający)

W 1725 r. znani matematycy szwajcarscy, Daniel i Nicolas Bernoulli udali się do Petersburga, gdzie odkryli pewną ciekawostkę, nazwaną potem **paradoksem petersburskim**.

1. Rozpatrzmy pewną grę losową, polegającą na rzucaniu monetą. Przypuśćmy, że gracz opłaca swój udział w grze pewną sumą pieniędzy $K$ (np. wyrażoną w $).
2. Gracz rzuca monetą i jeśli wypadnie rewers (przyjmijmy dalej, że jest to reszka), wówczas wygrywa 2$.

## Przykład 1 (wprowadzający)

W 1725 r. znani matematycy szwajcarscy, Daniel i Nicolas Bernoulli udali się do Petersburga, gdzie odkryli pewną ciekawostkę, nazwaną potem **paradoksem petersburskim**.

1. Rozpatrzmy pewną grę losową, polegającą na rzucaniu monetą. Przypuśćmy, że gracz opłaca swój udział w grze pewną sumą pieniędzy $K$ (np. wyrażoną w \$).
2. Gracz rzuca monetą i jeśli wypadnie rewers (przyjmijmy dalej, że jest to reszka), wówczas wygrywa 2\$.
3. Gdy wypadnie awers (orzeł), wówczas rzuca ponownie.

## Przykład 1 (wprowadzający)

W 1725 r. znani matematycy szwajcarscy, Daniel i Nicolas Bernoulli udali się do Petersburga, gdzie odkryli pewną ciekawostkę, nazwaną potem **paradoksem petersburskim**.

1. Rozpatrzmy pewną grę losową, polegającą na rzucaniu monetą. Przypuśćmy, że gracz opłaca swój udział w grze pewną sumą pieniędzy $K$ (np. wyrażoną w $).
2. Gracz rzuca monetą i jeśli wypadnie rewers (przyjmijmy dalej, że jest to reszka), wówczas wygrywa 2$.
3. Gdy wypadnie awers (orzeł), wówczas rzuca ponownie.
4. Jeśli w następnym rzucie wypadnie reszka, wówczas wygrywa podwojoną kwotę, w przeciwnym razie powtarza rzut monetą (czyli powtarza kroki 3-4, aż uzyska reszkę).

## Przykład 1 (wprowadzający)

W 1725 r. znani matematycy szwajcarscy, Daniel i Nicolas Bernoulli udali się do Petersburga, gdzie odkryli pewną ciekawostkę, nazwaną potem **paradoksem petersburskim**.

1. Rozpatrzmy pewną grę losową, polegającą na rzucaniu monetą. Przypuśćmy, że gracz opłaca swój udział w grze pewną sumą pieniędzy $K$ (np. wyrażoną w $).
2. Gracz rzuca monetą i jeśli wypadnie rewers (przyjmijmy dalej, że jest to reszka), wówczas wygrywa 2$.
3. Gdy wypadnie awers (orzeł), wówczas rzuca ponownie.
4. Jeśli w następnym rzucie wypadnie reszka, wówczas wygrywa podwojoną kwotę, w przeciwnym razie powtarza rzut monetą (czyli powtarza kroki 3-4, aż uzyska reszkę).

**Pytanie: Jaką sumę $K$ powinien zapłacić gracz przed przystąpieniem do gry, aby gra była sprawiedliwa?**

## Przykład 1 (wprowadzający)

- Odpowiedź brzmi – nieskończoną! Innymi słowy, żadna suma pieniędzy nie jest wystarczającą zapłatą za udział w tej grze.

## Przykład 1 (wprowadzający)

- Odpowiedź brzmi – nieskończoną! Innymi słowy, żadna suma pieniędzy nie jest wystarczającą zapłatą za udział w tej grze.
- Z powyższego wynika, że gra petersburska nie ma praktycznego zastosowania i pozostaje jedynie w sferze ciekawostek.

## Przykład 1 (wprowadzający)

- Odpowiedź brzmi – nieskończoną! Innymi słowy, żadna suma pieniędzy nie jest wystarczającą zapłatą za udział w tej grze.
- Z powyższego wynika, że gra petersburska nie ma praktycznego zastosowania i pozostaje jedynie w sferze ciekawostek.
- Aby jednak zrozumieć odpowiedź na zadane pytanie trzeba poznać podstawowe pojęcia związane ze zmienną losową i jej charakterystykami.

## Przykład 1 (wprowadzający)

- Odpowiedź brzmi – nieskończoną! Innymi słowy, żadna suma pieniędzy nie jest wystarczającą zapłatą za udział w tej grze.
- Z powyższego wynika, że gra petersburska nie ma praktycznego zastosowania i pozostaje jedynie w sferze ciekawostek.
- Aby jednak zrozumieć odpowiedź na zadane pytanie trzeba poznać podstawowe pojęcia związane ze zmienną losową i jej charakterystykami.
- Pojęcia te należą do podstawowych zagadnień **rachunku prawdopodobieństwa**. Będą one przedmiotem dalszych rozważań.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Niech $\Omega$ (czyt. omega) oznacza zbiór wszystkich możliwych wyników pewnego eksperymentu losowego.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Niech $\Omega$ (czyt. omega) oznacza zbiór wszystkich możliwych wyników pewnego eksperymentu losowego.
- Zbiór $\Omega$ nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** eksperymentu losowego.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Niech $\Omega$ (czyt. omega) oznacza zbiór wszystkich możliwych wyników pewnego eksperymentu losowego.
- Zbiór $\Omega$ nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** eksperymentu losowego.
- Elementy zbioru $\Omega$ oznaczamy symbolem $\omega$ i nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 2.**

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 2.**

- Rozważmy eksperyment polegający na **pojedynczym rzucie monetą**.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 2.**

- Rozważmy eksperyment polegający na **pojedynczym rzucie monetą**. Zbiór $\Omega$ wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu ma postać $\Omega = \{\{O\}, \{R\}\}$, gdzie $\{O\}$, $\{R\}$ są zdarzeniami elementarnymi oznaczającymi odpowiednio wyrzucenie orła lub reszki.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 2.**

- Rozważmy eksperyment polegający na **pojedynczym rzucie monetą**. Zbiór $\Omega$ wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu ma postać $\Omega = \{\{O\}, \{R\}\}$, gdzie $\{O\}$, $\{R\}$ są zdarzeniami elementarnymi oznaczającymi odpowiednio wyrzucenie orła lub reszki. Zdarzenia te oznaczymy umownie symbolami: $\omega_1 = \{O\}$, $\omega_2 = \{R\}$.

**Przykład 3.**

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 2.**

- Rozważmy eksperyment polegający na **pojedynczym rzucie monetą**. Zbiór $\Omega$ wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu ma postać $\Omega = \{\{O\}, \{R\}\}$, gdzie $\{O\}$, $\{R\}$ są zdarzeniami elementarnymi oznaczającymi odpowiednio wyrzucenie orła lub reszki. Zdarzenia te oznaczymy umownie symbolami: $\omega_1 = \{O\}$, $\omega_2 = \{R\}$.

**Przykład 3.**

- Niech eksperyment polega na **rzucie kostką sześcienną** do gry.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 2.**

- Rozważmy eksperyment polegający na **pojedynczym rzucie monetą**. Zbiór $\Omega$ wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu ma postać $\Omega = \{\{O\}, \{R\}\}$, gdzie $\{O\}$, $\{R\}$ są zdarzeniami elementarnymi oznaczającymi odpowiednio wyrzucenie orła lub reszki. Zdarzenia te oznaczymy umownie symbolami: $\omega_1 = \{O\}$, $\omega_2 = \{R\}$.

**Przykład 3.**

- Niech eksperyment polega na **rzucie kostką sześcienną** do gry. Mamy wtedy:

$$\Omega = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\},$$

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 2.**

- Rozważmy eksperyment polegający na **pojedynczym rzucie monetą**. Zbiór $\Omega$ wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu ma postać $\Omega = \{\{O\}, \ \{R\}\}$, gdzie $\{O\}$, $\{R\}$ są zdarzeniami elementarnymi oznaczającymi odpowiednio wyrzucenie orła lub reszki. Zdarzenia te oznaczymy umownie symbolami: $\omega_1 = \{O\}, \ \omega_2 = \{R\}$.

**Przykład 3.**

- Niech eksperyment polega na **rzucie kostką sześcienną** do gry. Mamy wtedy:

$$\Omega = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\},$$

gdzie $\omega_1 = \{1\}, \ldots, \omega_6 = \{6\}$ są zdarzeniami elementarnymi.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

W przykładach 2 i 3 przestrzeń $\Omega$ jest zbiorem **skończonym**.

**Przykład 4.**

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

W przykładach 2 i 3 przestrzeń $\Omega$ jest zbiorem **skończonym**.

**Przykład 4.**

- Wróćmy do gry petersburskiej. Zauważymy, że eksperyment ten można opisać jako **rzucanie monetą do momentu wyrzucenia reszki**.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

W przykładach 2 i 3 przestrzeń $\Omega$ jest zbiorem **skończonym**.

**Przykład 4.**

- Wróćmy do gry petersburskiej. Zauważymy, że eksperyment ten można opisać jako **rzucanie monetą do momentu wyrzucenia reszki**.
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ ma w tym przypadku postać:
  $\Omega = \{\{R\}, \{OR\}, \{OOR\}, \{OOOR\}, \{OOOOR\}, \ldots\}$,
  gdzie:
  $\omega_1 = \{R\}$, $\omega_2 = \{OR\}$, $\omega_3 = \{OOR\}$, $\omega_4 = \{OOOR\} \ldots$
  to zdarzenia elementarne w tym eksperymencie.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

W przykładach 2 i 3 przestrzeń $\Omega$ jest zbiorem **skończonym**.

**Przykład 4.**

- Wróćmy do gry petersburskiej. Zauważymy, że eksperyment ten można opisać jako **rzucanie monetą do momentu wyrzucenia reszki**.
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ ma w tym przypadku postać:
  $\Omega = \{\{R\}, \{OR\}, \{OOR\}, \{OOOR\}, \{OOOOR\}, \ldots\}$,
  gdzie:
  $\omega_1 = \{R\}$, $\omega_2 = \{OR\}$, $\omega_3 = \{OOR\}$, $\omega_4 = \{OOOR\} \ldots$
  to zdarzenia elementarne w tym eksperymencie.
- Zauważymy, że zbiór $\Omega$ jest nieskończony, ale **przeliczalny** (tj. równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych).

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 5.**

- Rozważmy inny eksperyment polegający na **pomiarze czasu oczekiwania w przychodni na wizytę u lekarza** (mierzony np. w godzinach).

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 5.**

- Rozważmy inny eksperyment polegający na **pomiarze czasu oczekiwania w przychodni na wizytę u lekarza** (mierzony np. w godzinach).
- Przestrzeń $\Omega$ jest tu przedziałem liczb rzeczywistych $[0, 8]$.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 5.**

- Rozważmy inny eksperyment polegający na **pomiarze czasu oczekiwania w przychodni na wizytę u lekarza** (mierzony np. w godzinach).
- Przestrzeń $\Omega$ jest tu przedziałem liczb rzeczywistych $[0, 8]$.
- W tym przypadku $\Omega$ jest zbiorem nieskończonym, ponieważ w przedziale $[0, 8]$ mieści się nieskończenie wiele liczb rzeczywistych.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych

**Przykład 5.**

- Rozważmy inny eksperyment polegający na **pomiarze czasu oczekiwania w przychodni na wizytę u lekarza** (mierzony np. w godzinach).
- Przestrzeń $\Omega$ jest tu przedziałem liczb rzeczywistych $[0, 8]$.
- W tym przypadku $\Omega$ jest zbiorem nieskończonym, ponieważ w przedziale $[0, 8]$ mieści się nieskończenie wiele liczb rzeczywistych.
- Ponadto, zbiór $\Omega$ jest **nieprzeliczalny**.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

## Zdarzenie losowe i rodzina zdarzeń losowych dla zbioru $\Omega$ co najwyżej przeliczalnego

- Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ zawiera skończoną lub przeliczalną liczbę elementów, to każdy podzbiór zbioru $\Omega$ nazywamy **zdarzeniem losowym**.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

## Zdarzenie losowe i rodzina zdarzeń losowych dla zbioru $\Omega$ co najwyżej przeliczalnego

- Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ zawiera skończoną lub przeliczalną liczbę elementów, to każdy podzbiór zbioru $\Omega$ nazywamy **zdarzeniem losowym**.
- Rodzinę wszystkich zdarzeń losowych danego eksperymentu oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{Z}$.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

## Zdarzenie losowe i rodzina zdarzeń losowych dla zbioru $\Omega$ co najwyżej przeliczalnego

- Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ zawiera skończoną lub przeliczalną liczbę elementów, to każdy podzbiór zbioru $\Omega$ nazywamy **zdarzeniem losowym**.
- Rodzinę wszystkich zdarzeń losowych danego eksperymentu oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{Z}$.
- W przypadku eksperymentu polegającego na pojedynczym rzucie monetą (zob. przykład 2), rodzina $\mathcal{Z}$ zdarzeń losowych jest postaci:

$$\mathcal{Z} = \{\{O\}, \{R\}, \Omega, \emptyset\},$$

gdzie $\emptyset$ oznacza zbiór pusty.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

## Zdarzenie losowe i rodzina zdarzeń losowych dla zbioru $\Omega$ co najwyżej przeliczalnego

- Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ zawiera skończoną lub przeliczalną liczbę elementów, to każdy podzbiór zbioru $\Omega$ nazywamy **zdarzeniem losowym**.
- Rodzinę wszystkich zdarzeń losowych danego eksperymentu oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{Z}$.
- W przypadku eksperymentu polegającego na pojedynczym rzucie monetą (zob. przykład 2), rodzina $\mathcal{Z}$ zdarzeń losowych jest postaci:

  $$\mathcal{Z} = \{\{O\}, \{R\}, \Omega, \emptyset\},$$

  gdzie $\emptyset$ oznacza zbiór pusty.
- Rodzinę $\mathcal{Z}$ tworzą tu wszystkie podzbiory zbioru $\Omega$, łącznie z samym zbiorem $\Omega$ i jego dopełnieniem, czyli zbiorem $\emptyset$.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykład rodziny zdarzeń losowych

- W przypadku eksperymentu polegającego na rzucie kostką do gry (zob. przykład 3) rodzina $\mathcal{Z}$ jest znacznie liczniejsza. W jej skład wchodzą wszystkie podzbiory jedno-, dwu-, trzy-, cztero- i pięcioelementowe, a ponadto, cały zbiór $\Omega$ oraz zbiór pusty. Mamy więc:

$$\mathcal{Z} = \{\{1\}, \ldots, \{6\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,6\},$$

$$\{2,3\}, \ldots, \{2,6\}, \{3,4\}, \ldots, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\},$$

$$\{1,2,3\}, \ldots, \{1,2,3,4\}, \ldots, \{1,2,3,4,5\}, \ldots, \Omega, \emptyset\}.$$

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

## Zdarzenie losowe i rodzina zdarzeń losowych dla zbioru $\Omega$ nieprzeliczalnego

- Gdy $\Omega$ jest zbiorem nieprzeliczalnym (tak, jak w przykładzie 5), wówczas nie każdy jego podzbiór nazywamy zdarzeniem losowym.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

## Zdarzenie losowe i rodzina zdarzeń losowych dla zbioru $\Omega$ nieprzeliczalnego

- Gdy $\Omega$ jest zbiorem nieprzeliczalnym (tak, jak w przykładzie 5), wówczas nie każdy jego podzbiór nazywamy zdarzeniem losowym.
- Ograniczenie to wynika stąd, że zdarzeniom losowym będziemy chcieli przyporządkować dalej **miarę prawdopodobieństwa**.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

## Zdarzenie losowe i rodzina zdarzeń losowych dla zbioru $\Omega$ nieprzeliczalnego

- Gdy $\Omega$ jest zbiorem nieprzeliczalnym (tak, jak w przykładzie 5), wówczas nie każdy jego podzbiór nazywamy zdarzeniem losowym.
- Ograniczenie to wynika stąd, że zdarzeniom losowym będziemy chcieli przyporządkować dalej **miarę prawdopodobieństwa**.
- Aby możliwe było w takim przypadku zdefiniowanie tzw. bezatomowej miary prawdopodobieństwa, rodzina $\mathcal{Z}$ musi być nieco uboższą rodziną podzbiorów zbioru $\Omega$ (jest nią pewne $\sigma$-ciało podzbiorów zbioru $\Omega$).

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Zdarzenie losowe i rodzina zdarzeń losowych dla zbioru $\Omega$ nieprzeliczalnego

- Gdy $\Omega$ jest zbiorem nieprzeliczalnym (tak, jak w przykładzie 5), wówczas nie każdy jego podzbiór nazywamy zdarzeniem losowym.
- Ograniczenie to wynika stąd, że zdarzeniom losowym będziemy chcieli przyporządkować dalej **miarę prawdopodobieństwa**.
- Aby możliwe było w takim przypadku zdefiniowanie tzw. bezatomowej miary prawdopodobieństwa, rodzina $\mathcal{Z}$ musi być nieco uboższą rodziną podzbiorów zbioru $\Omega$ (jest nią pewne $\sigma$-ciało podzbiorów zbioru $\Omega$).
- Zagadnienie definiowania takiej rodziny w przypadku nieprzeliczalnego zbioru $\Omega$ nie będzie omawiane.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

- Każdemu zdarzeniu losowemu $A \in \mathcal{Z}$ można przypisać miarę prawdopodobieństwa $P(A)$, zwaną **prawdopodobieństwem zdarzenia $A$**.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

- Każdemu zdarzeniu losowemu $A \in \mathcal{Z}$ można przypisać miarę prawdopodobieństwa $P(A)$, zwaną **prawdopodobieństwem zdarzenia $A$**.
- Własności, jakimi powinna się charakteryzować miara prawdopodobieństwa, określają następujące trzy aksjomaty:

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

- Każdemu zdarzeniu losowemu $A \in \mathcal{Z}$ można przypisać miarę prawdopodobieństwa $P(A)$, zwaną **prawdopodobieństwem zdarzenia $A$**.
- Własności, jakimi powinna się charakteryzować miara prawdopodobieństwa, określają następujące trzy aksjomaty:
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$,

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

- Każdemu zdarzeniu losowemu $A \in \mathcal{Z}$ można przypisać miarę prawdopodobieństwa $P(A)$, zwaną **prawdopodobieństwem zdarzenia $A$**.
- Własności, jakimi powinna się charakteryzować miara prawdopodobieństwa, określają następujące trzy aksjomaty:
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
  2. $P(\Omega) = 1$,

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

- Każdemu zdarzeniu losowemu $A \in \mathcal{Z}$ można przypisać miarę prawdopodobieństwa $P(A)$, zwaną **prawdopodobieństwem zdarzenia $A$**.
- Własności, jakimi powinna się charakteryzować miara prawdopodobieństwa, określają następujące trzy aksjomaty:
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
  2. $P(\Omega) = 1$,
  3. jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{Z}$ są parami rozłącznymi zdarzeniami losowymi, tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to:

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Klasyczna definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

- Jeśli przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ zawiera $n$ **jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych**, spośród których $k$ sprzyja zajściu zdarzenia losowego $A$, to prawdopodobieństwem $P(A)$ zdarzenia $A$ jest iloraz liczby zdarzeń sprzyjających do łącznej liczby zdarzeń, czyli:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

## Klasyczna definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

- Jeśli przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ zawiera $n$ **jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych**, spośród których $k$ sprzyja zajściu zdarzenia losowego $A$, to prawdopodobieństwem $P(A)$ zdarzenia $A$ jest iloraz liczby zdarzeń sprzyjających do łącznej liczby zdarzeń, czyli:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

- Wróćmy do przykładu 3. Rozważmy zdarzenie losowe $A$ polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek w rzucie kostką sześcienną. Przestrzeń $\Omega$ składa się tu z sześciu jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych. Liczba zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia $A$ wynosi 3 (są to: $\omega_2=\{2\}, \omega_4=\{4\}, \omega_6=\{6\}$). Stąd $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przestrzeń probabilistyczna i zmienna losowa

- **Przestrzenią probabilistyczną** danego eksperymentu losowego nazywamy trójkę:

$$(\Omega, \mathcal{Z}, P).$$

Przestrzeń probabilistyczna jest formalnym zapisem (reprezentacją) eksperymentu losowego.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przestrzeń probabilistyczna i zmienna losowa

- **Przestrzenią probabilistyczną** danego eksperymentu losowego nazywamy trójkę:

  $$(\Omega, \mathcal{Z}, P).$$

  Przestrzeń probabilistyczna jest formalnym zapisem (reprezentacją) eksperymentu losowego.

- **Zmienną losową** (rzeczywistą) $X$ nazywamy odwzorowanie przyporządkowującą każdemu zdarzeniu elementarnemu $\omega$ ze zbioru $\Omega$ liczbę rzeczywistą, w taki sposób, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $b$ podzbiór:

  $$\{\omega : X(\omega) < b\}$$

  jest zdarzeniem losowym, tj. należy do rodziny $\mathcal{Z}$.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykład zmiennej losowej

**Przykład 6.**

- Załóżmy, że zorganizowano grę polegającą na rzucie kostką do gry (zob. przykład 3). Jeśli gracz wyrzuci 6 oczek, to wygrywa 10 zł, w przeciwnym razie płaci 2 zł.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykład zmiennej losowej

**Przykład 6.**

- Załóżmy, że zorganizowano grę polegającą na rzucie kostką do gry (zob. przykład 3). Jeśli gracz wyrzuci 6 oczek, to wygrywa 10 zł, w przeciwnym razie płaci 2 zł.
- W ten sposób określiliśmy zmienną losową $X$ (wygraną), która przyporządkowuje zdarzeniom elementarnym $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ wartości rzeczywiste $-2$ lub 10 w następujący sposób:

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_5) = -2, \quad X(\omega_6) = 10,$$

gdzie $\omega_1 = \{1\}, \omega_2 = \{2\}, \ldots, \omega_6 = \{6\}$.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykład zmiennej losowej

**Przykład 6.**

- Załóżmy, że zorganizowano grę polegającą na rzucie kostką do gry (zob. przykład 3). Jeśli gracz wyrzuci 6 oczek, to wygrywa 10 zł, w przeciwnym razie płaci 2 zł.
- W ten sposób określiliśmy zmienną losową $X$ (wygraną), która przyporządkowuje zdarzeniom elementarnym $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ wartości rzeczywiste $-2$ lub 10 w następujący sposób:

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_5) = -2, \quad X(\omega_6) = 10,$$

gdzie $\omega_1 = \{1\}, \omega_2 = \{2\}, \ldots, \omega_6 = \{6\}$.
- Dla uproszczenia oznaczeń wartości zmiennej $X$ oznacza się symbolem $x_i$ i określa mianem **realizacji** zmiennej $X$.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykład zmiennej losowej

**Przykład 7.**

- W podobny sposób, jak w przykładzie 6, możemy zdefiniować zmienną losową $X$ będącą wygraną w grze petersburskiej (zob. przykład 1).

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Przykład zmiennej losowej

**Przykład 7.**

- W podobny sposób, jak w przykładzie 6, możemy zdefiniować zmienną losową $X$ będącą wygraną w grze petersburskiej (zob. przykład 1).
- Możliwe realizacje tej zmiennej są następujące:

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 4,\ X(\omega_3) = 8,\ X(\omega_4) = 16 \quad \text{itd.}$$

gdzie:
$\omega_1 = \{R\}, \omega_2 = \{OR\}, \omega_3 = \{OOR\}, \omega_4 = \{OOOR\}, \ldots.$

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Zmienne losowe – podział

Ze względu na zbiór wartości przyjmowanych przez zmienną losową wyróżniamy:

- **zmienne losowe skokowe** (inaczej – dyskretne),
- **zmienne losowe ciągłe**.

# Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa
## Zmienne losowe – podział

Ze względu na zbiór wartości przyjmowanych przez zmienną losową wyróżniamy:

- **zmienne losowe skokowe** (inaczej – dyskretne),
- **zmienne losowe ciągłe**.

Jeśli zbiór wartości zmiennej losowej jest co najwyżej przeliczalny, to taką zmienną nazywamy skokową, w przeciwnym przypadku zmienną nazywamy ciągłą.

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Rozkład zmiennej losowej skokowej

- W odniesieniu do zmiennej losowej skokowej określenie jej rozkładu prawdopodobieństwa sprowadza się do podania **funkcji rozkładu prawdopodobieństwa**, tj. do podania prawdopodobieństw $p_i$, z jakimi zmienna losowa $X$ przyjmuje kolejne realizacje $x_i$, czyli:

$$p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Rozkład zmiennej losowej skokowej

- W odniesieniu do zmiennej losowej skokowej określenie jej rozkładu prawdopodobieństwa sprowadza się do podania **funkcji rozkładu prawdopodobieństwa**, tj. do podania prawdopodobieństw $p_i$, z jakimi zmienna losowa $X$ przyjmuje kolejne realizacje $x_i$, czyli:

$$p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

- Rozkład ten często przedstawia się w postaci tabelarycznej:

| realizacje $x_i$ zmiennej $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_k$ | $\ldots$ | razem |
|---|---|---|---|---|---|---|
| prawdopodobieństwa $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | $\ldots$ | $p_k$ | $\ldots$ | 1 |

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Przykład rozkładu zmiennej losowej skokowej

- W przykładzie 6, dotyczącym wygranej $X$ w wysokości -2 lub 10 zł, rozkład prawdopodobieństwa ma postać: $P(X=-2)=\frac{5}{6}, \quad P(X=10)=\frac{1}{6}$

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Przykład rozkładu zmiennej losowej skokowej

- W przykładzie 6, dotyczącym wygranej $X$ w wysokości -2 lub 10 zł, rozkład prawdopodobieństwa ma postać:
  $P(X = -2) = \frac{5}{6}$, $P(X = 10) = \frac{1}{6}$

  lub tabelarycznie

| realizacje $x_i$ zmiennej $X$ | $-2$ | 10 | razem |
|---|---|---|---|
| prawdopodobieństwa $p_i$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne

## Przykład rozkładu zmiennej losowej skokowej

- W przykładzie 6, dotyczącym wygranej $X$ w wysokości -2 lub 10 zł, rozkład prawdopodobieństwa ma postać: $P(X=-2)=\frac{5}{6}$, $P(X=10)=\frac{1}{6}$

  lub tabelarycznie

| realizacje $x_i$ zmiennej $X$ | $-2$ | 10 | razem |
|---|---|---|---|
| prawdopodobieństwa $p_i$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

- W przykładzie 7 rozkład prawdopodobieństwa wygranej $X$ jest postaci:

$$P(X=2)=\frac{1}{2},\quad P(X=4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\quad P(X=8)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \text{ itd.}$$

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Przykład rozkładu zmiennej losowej skokowej

- W przykładzie 6, dotyczącym wygranej $X$ w wysokości -2 lub 10 zł, rozkład prawdopodobieństwa ma postać: $P(X=-2)=\frac{5}{6}, \quad P(X=10)=\frac{1}{6}$
  lub tabelarycznie

| realizacje $x_i$ zmiennej $X$ | $-2$ | 10 | razem |
|---|---|---|---|
| prawdopodobieństwa $p_i$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

- W przykładzie 7 rozkład prawdopodobieństwa wygranej $X$ jest postaci:

$$P(X=2)=\frac{1}{2}, \quad P(X=4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}, \quad P(X=8)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \text{ itd.}$$

lub tabelarycznie

| realizacje $x_i$ zmiennej $X$ | 2 | 4 | 8 | 16 | ... | razem |
|---|---|---|---|---|---|---|
| prawdopodobieństwa $p_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | ... | 1 |

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Dystrybuanta zmiennej losowej

- Inną, ważną funkcją opisującą rozkład zmiennej losowej $X$ (zarówno skokowej, jak i ciągłej) jest **dystrybuanta**, tj. funkcja $F$ określona dla dowolnej, rzeczywistej wartości $b$ jako:
  $F(b) = P(\omega : X(\omega) < b)$, w skrócie $F(b) = P(X < b)$.

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Dystrybuanta zmiennej losowej

- Inną, ważną funkcją opisującą rozkład zmiennej losowej $X$ (zarówno skokowej, jak i ciągłej) jest **dystrybuanta**, tj. funkcja $F$ określona dla dowolnej, rzeczywistej wartości $b$ jako:
  $F(b) = P(\omega : X(\omega) < b)$, w skrócie $F(b) = P(X < b)$.
- Dla każdego rzeczywistego $b$ dystrybuanta $F(b)$ podaje prawdopodobieństwo określone dla podzbioru zdarzeń elementarnych $\{\omega : X(\omega) < b\}$ (na mocy definicji zmiennej losowej podzbiór ten jest zdarzeniem losowym, a tym samym ma przyporządkowane prawdopodobieństwo).

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Dystrybuanta zmiennej losowej

- Inną, ważną funkcją opisującą rozkład zmiennej losowej $X$ (zarówno skokowej, jak i ciągłej) jest **dystrybuanta**, tj. funkcja $F$ określona dla dowolnej, rzeczywistej wartości $b$ jako:
  $F(b) = P(\omega : X(\omega) < b)$, w skrócie $F(b) = P(X < b)$.
- Dla każdego rzeczywistego $b$ dystrybuanta $F(b)$ podaje prawdopodobieństwo określone dla podzbioru zdarzeń elementarnych $\{\omega : X(\omega) < b\}$ (na mocy definicji zmiennej losowej podzbiór ten jest zdarzeniem losowym, a tym samym ma przyporządkowane prawdopodobieństwo).
- Dla zmiennej losowej skokowej wartość dystrybuanty $F(b)$ można obliczyć, sumując prawdopodobieństwa $p_i$ dla tych realizacji $x_i$, które są mniejsze od $b$, czyli $F(b) = \sum_{x_i < b} p_i$.

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Interpretacja dystrybuanty

- Dystrybuanta $F$ w zadanym punkcie (oznaczonym tu przez $b$, choć argument tej funkcji oznaczany jest często symbolem $x$) **informuje, jakie jest prawdopodobieństwo, że zaobserwujemy realizację zmiennej losowej mniejszą od zadanej wartości $b$.**

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Interpretacja dystrybuanty

- Dystrybuanta $F$ w zadanym punkcie (oznaczonym tu przez $b$, choć argument tej funkcji oznaczany jest często symbolem $x$) **informuje, jakie jest prawdopodobieństwo, że zaobserwujemy realizację zmiennej losowej mniejszą od zadanej wartości $b$.**
- Wróćmy do przykładu 7. Dystrybuantę w ustalonym punkcie $b$, np. dla $b = 10$ \$, możemy interpretować w tym przykładzie jako prawdopodobieństwo zdarzenia, że wygrana będzie mniejsza od 10\$, czyli:

$$F(10)=P(X<10)=P(X=2)+P(X=4)+P(X=8)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8},$$

a więc prawdopodobieństwo, iż wygrana w grze petersburskiej będzie mniejsza niż 10\$ jest wysokie, równe $\frac{7}{8}$.

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne

### Własności dystrybuanty

Własności dystrybuanty:

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Własności dystrybuanty

Własności dystrybuanty:

1. jest funkcją niemalejącą,

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Własności dystrybuanty

Własności dystrybuanty:

1. jest funkcją niemalejącą,
2. jest co najmniej lewostronnie ciągła,

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Własności dystrybuanty

Własności dystrybuanty:

1. jest funkcją niemalejącą,
2. jest co najmniej lewostronnie ciągła,
3. wartości dystrybuanty $F$ dążą do 1, gdy argument funkcji dąży do $\infty$ oraz do 0, gdy argument funkcji dąży do $-\infty$,

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Własności dystrybuanty

Własności dystrybuanty:

1. jest funkcją niemalejącą,
2. jest co najmniej lewostronnie ciągła,
3. wartości dystrybuanty $F$ dążą do 1, gdy argument funkcji dąży do $\infty$ oraz do 0, gdy argument funkcji dąży do $-\infty$,
4. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Rozkład zmiennej losowej ciągłej

- Dla zmiennej losowej ciągłej nie jest możliwe opisanie jej rozkładu prawdopodobieństwa poprzez podanie prawdopodobieństw pojedycznych realizacji tej zmiennej, czyli przez podanie prawdopodobieństw $P(X = x)$ dla możliwych realizacji $x$.

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Rozkład zmiennej losowej ciągłej

- Dla zmiennej losowej ciągłej nie jest możliwe opisanie jej rozkładu prawdopodobieństwa poprzez podanie prawdopodobieństw pojedycznych realizacji tej zmiennej, czyli przez podanie prawdopodobieństw $P(X = x)$ dla możliwych realizacji $x$.
- Nawiasem mówiąc, w przypadku zmiennej ciągłej prawdopodobieństwa takie są równe 0.

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Rozkład zmiennej losowej ciągłej

- Dla zmiennej losowej ciągłej nie jest możliwe opisanie jej rozkładu prawdopodobieństwa poprzez podanie prawdopodobieństw pojedycznych realizacji tej zmiennej, czyli przez podanie prawdopodobieństw $P(X = x)$ dla możliwych realizacji $x$.
- Nawiasem mówiąc, w przypadku zmiennej ciągłej prawdopodobieństwa takie są równe 0.
- Można jednak określić prawdopodobieństwa przyjmowania przez zmienną ciągłą wartości z ustalonych przedziałów liczbowych.

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Rozkład zmiennej losowej ciągłej

- Dla zmiennej losowej ciągłej nie jest możliwe opisanie jej rozkładu prawdopodobieństwa poprzez podanie prawdopodobieństw pojedycznych realizacji tej zmiennej, czyli przez podanie prawdopodobieństw $P(X = x)$ dla możliwych realizacji $x$.
- Nawiasem mówiąc, w przypadku zmiennej ciągłej prawdopodobieństwa takie są równe 0.
- Można jednak określić prawdopodobieństwa przyjmowania przez zmienną ciągłą wartości z ustalonych przedziałów liczbowych.
- Z tego powodu do opisu rozkładu zmiennej losowej ciągłej wykorzystujemy tzw. **funkcję gęstości**.

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Rozkład zmiennej losowej ciągłej

- **Funkcję gęstości** zmiennej losowej ciągłej definiujemy wzorem:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x \leq X < x + h)}{h}.$$

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Rozkład zmiennej losowej ciągłej

- **Funkcję gęstości** zmiennej losowej ciągłej definiujemy wzorem:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x \leq X < x + h)}{h}.$$

- Wartość $f(x)$ możemy interpretować jako prawdopodobieństwo zaobserwowania realizacji zmiennej $X$ w przedziale $[x, x + h)$ przy założeniu, że długość $h$ przedziału dąży do 0, przy czym prawdopodobieństwo to określa się w przeliczeniu na jednostkę długości (stąd dzielenie przez $h$ w powyższym wyrażeniu).

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Dystrybuanta zmiennej losowej ciągłej

- W przypadku zmiennej losowej ciągłej zachodzi:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

## Podstawowe charakterystyki funkcyjne
### Dystrybuanta zmiennej losowej ciągłej

- W przypadku zmiennej losowej ciągłej zachodzi:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

- Zauważymy, że przyjmując $a = -\infty$, otrzymujemy:

$$P(-\infty < X < b) = P(X < b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

# Podstawowe charakterystyki funkcyjne
## Dystrybuanta zmiennej losowej ciągłej

- W przypadku zmiennej losowej ciągłej zachodzi:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

- Zauważymy, że przyjmując $a = -\infty$, otrzymujemy:

$$P(-\infty < X < b) = P(X < b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

- Z powyższego wynika, że dystrybuantę $F$ zmiennej losowej ciągłej można zapisać wzorem:

$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Podział

Podstawowymi charakterystykami liczbowymi (inaczej parametrami) rozkładu zmiennej losowej skokowej i ciągłej są:

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Podział

Podstawowymi charakterystykami liczbowymi (inaczej parametrami) rozkładu zmiennej losowej skokowej i ciągłej są:

– wartość oczekiwana $E(X)$,

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Podział

Podstawowymi charakterystykami liczbowymi (inaczej parametrami) rozkładu zmiennej losowej skokowej i ciągłej są:

- wartość oczekiwana $E(X)$,
- wariancja $D^2(X)$,

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Podział

Podstawowymi charakterystykami liczbowymi (inaczej parametrami) rozkładu zmiennej losowej skokowej i ciągłej są:

- wartość oczekiwana $E(X)$,
- wariancja $D^2(X)$,
- odchylenie standardowe $D(X)$.

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Wartość oczekiwana

**Wartością oczekiwaną** zmiennej losowej (o ile istnieje) nazywamy liczbę, oznaczoną umownie symbolem $E(X)$, zdefiniowaną wzorem:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot p_i, & \text{dla zmiennej losowej skokowej,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, & \text{dla zmiennej losowej ciągłej,} \end{cases}$$

gdzie $p_i \equiv P(X = x_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots$ oznacza funkcję rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej skokowej, natomiast $f(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$ oznacza funkcję gęstości zmiennej losowej ciągłej.

## Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
### Wariancja i odchylenie standardowe

**Wariancją** zmiennej losowej jest wartość oczekiwaną kwadratu odchyleń zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej, czyli:

$$D^2(X) = E(X - E(X))^2.$$

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Wariancja i odchylenie standardowe

**Wariancją** zmiennej losowej jest wartość oczekiwaną kwadratu odchyleń zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej, czyli:

$$D^2(X) = E(X - E(X))^2.$$

Zauważymy, że oznaczając $Y = (X - E(X))^2$, wariancję $D^2(X)$ możemy obliczać jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y$. Stąd, przez analogię do formuły na wartość oczekiwaną, mamy:

$$D^2(X) = \begin{cases} \sum_i (x_i - E(X))^2 \cdot p_i, & \text{dla zmiennej skokowej,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)dx, & \text{dla zmiennej ciągłej.} \end{cases}$$

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Wariancja i odchylenie standardowe

**Wariancją** zmiennej losowej jest wartość oczekiwaną kwadratu odchyleń zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej, czyli:

$$D^2(X) = E(X - E(X))^2.$$

Zauważymy, że oznaczając $Y = (X - E(X))^2$, wariancję $D^2(X)$ możemy obliczać jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y$. Stąd, przez analogię do formuły na wartość oczekiwaną, mamy:

$$D^2(X) = \begin{cases} \sum_i (x_i - E(X))^2 \cdot p_i, & \text{dla zmiennej skokowej,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)dx, & \text{dla zmiennej ciągłej.} \end{cases}$$

**Odchyleniem standardowym** $D(X)$ nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji, czyli: $D(X) = \sqrt{D^2(X)}$.

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Przykład obliczania wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego

- W przykładzie 6 wartość oczekiwana wygranej wynosi: $E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = -2 \cdot \frac{5}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} = 0$ zł.

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Przykład obliczania wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego

- W przykładzie 6 wartość oczekiwana wygranej wynosi: $E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = -2 \cdot \frac{5}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} = 0$ zł.
- Wielkość ta informuje, jaka jest przeciętna wygrana przypadająca na pojedynczą grę w przypadku, gdyby powtarzać tę grę wielokrotnie (a dokładniej – nieskończenie wiele razy).

## Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
### Przykład obliczania wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego

- W przykładzie 6 wartość oczekiwana wygranej wynosi: $E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = -2 \cdot \frac{5}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} = 0$ zł.
- Wielkość ta informuje, jaka jest przeciętna wygrana przypadająca na pojedynczą grę w przypadku, gdyby powtarzać tę grę wielokrotnie (a dokładniej – nieskończenie wiele razy).
- Ponieważ przeciętna wygrana wynosi w tym przypadku 0zł, a więc grę możemy uznać za sprawiedliwą.

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Przykład obliczania wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego

- W przykładzie 6 wartość oczekiwana wygranej wynosi: $E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = -2 \cdot \frac{5}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} = 0$ zł.
- Wielkość ta informuje, jaka jest przeciętna wygrana przypadająca na pojedynczą grę w przypadku, gdyby powtarzać tę grę wielokrotnie (a dokładniej – nieskończenie wiele razy).
- Ponieważ przeciętna wygrana wynosi w tym przypadku 0zł, a więc grę możemy uznać za sprawiedliwą.
- Wariancja i odchylenie standardowe wygranej wynoszą: $D^2(X) = \sum_{i=1}^{2} (x_i - E(X))^2 p_i =$ $(-2-0)^2 \cdot \frac{5}{6} + (10-0)^2 \cdot \frac{1}{6} = 20,\ D(X) = \sqrt{20} \approx 4,5$ zł, co oznacza, że wygrane w pojedynczych grach odchylają się od wartości przeciętnej, równej 0 zł, średnio o ok. $4,5$zł.

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Przykład obliczania wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego

- Wracając do gry petersburskiej (zob. przykłady 1 i 7), skorzystamy z analogicznej formuły: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$.

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Przykład obliczania wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego

- Wracając do gry petersburskiej (zob. przykłady 1 i 7), skorzystamy z analogicznej formuły: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$.
- Suma ma w tym przypadku nieskończenie wiele wyrazów, każdy równy 1, co oznacza, że suma jest nieskończona.

# Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
## Przykład obliczania wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego

- Wracając do gry petersburskiej (zob. przykłady 1 i 7), skorzystamy z analogicznej formuły: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$.
- Suma ma w tym przypadku nieskończenie wiele wyrazów, każdy równy 1, co oznacza, że suma jest nieskończona.
- Odpowiadając ponownie na pytanie w przykładzie 1, stwierdzamy, że gra byłaby sprawiedliwa, gdyby gracz, przystępując do gry, wpłacił początkową kwotę $K$, będącą równowartością powyższej sumy.

## Podstawowe charakterystyki liczbowe zmiennej losowej
### Przykład obliczania wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego

- Wracając do gry petersburskiej (zob. przykłady 1 i 7), skorzystamy z analogicznej formuły: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$.
- Suma ma w tym przypadku nieskończenie wiele wyrazów, każdy równy 1, co oznacza, że suma jest nieskończona.
- Odpowiadając ponownie na pytanie w przykładzie 1, stwierdzamy, że gra byłaby sprawiedliwa, gdyby gracz, przystępując do gry, wpłacił początkową kwotę $K$, będącą równowartością powyższej sumy.
- **Wniosek:** Żadna suma pieniędzy nie jest wystarczającą zapłatą za udział w grze petersburskiej (mimo, że w grze wysokie prawdopodobieństwo mają jedynie małe wygrane, np. mniejsze niż 10 $).