PODSTAWY WNIOSKOWANIA STATYSTYCZNEGO – część I

Agnieszka Rossa

Szkic wykładu

Przykład wprowadzający

- W Polsce różne głosowania odbywają się co kilka lat, a pytanie o preferencje wyborcze jest jednym z często zadawanych w badaniach sondażowych.

Przykład wprowadzający

- W Polsce różne głosowania odbywają się co kilka lat, a pytanie o preferencje wyborcze jest jednym z często zadawanych w badaniach sondażowych.
- Sondaż PGB przeprowadzony wśód 1018 osób tuż przed wyborami parlamentarnymi w 2007 r. wskazywał m.in., że na kandydatów PiS głosować będzie 35% wyborców.

Przykład wprowadzający

- W Polsce różne głosowania odbywają się co kilka lat, a pytanie o preferencje wyborcze jest jednym z często zadawanych w badaniach sondażowych.
- Sondaż PGB przeprowadzony wśód 1018 osób tuż przed wyborami parlamentarnymi w 2007 r. wskazywał m.in., że na kandydatów PiS głosować będzie 35% wyborców.
- Zgodnie z oficjalnymi wynikami wyborów, rzeczywisty odsetek głosów oddanych na PiS w tych wyborach był równy 32,11%.

Przykład wprowadzający

- W Polsce różne głosowania odbywają się co kilka lat, a pytanie o preferencje wyborcze jest jednym z często zadawanych w badaniach sondażowych.
- Sondaż PGB przeprowadzony wśód 1018 osób tuż przed wyborami parlamentarnymi w 2007 r. wskazywał m.in., że na kandydatów PiS głosować będzie 35% wyborców.
- Zgodnie z oficjalnymi wynikami wyborów, rzeczywisty odsetek głosów oddanych na PiS w tych wyborach był równy 32,11%.
- Wynik sondażu był zatem zbliżony do rzeczywistego pomimo, że próba 1018 respondentów była relatywnie bardzo mała wobec populacji ponad 30,6 mln osób uprawnionych do głosowania (czy też ok. 16,5 mln faktycznie głosujących).

Uwagi do przykładu

- **Uwaga 1:** Wylosowana próba respondentów nie daje pełnej gwarancji, że udział głosów na daną partię w tej próbie będzie taki sam, jak w całej populacji. Istnieje jednak pewna zależność między licznością próby a dokładnością oszacowania danego wskaźnika, do czego wrócimy.

Uwagi do przykładu

- **Uwaga 1:** Wylosowana próba respondentów nie daje pełnej gwarancji, że udział głosów na daną partię w tej próbie będzie taki sam, jak w całej populacji. Istnieje jednak pewna zależność między licznością próby a dokładnością oszacowania danego wskaźnika, do czego wrócimy.
- **Uwaga 2:** Wskazane byłoby, aby oprócz pojedycznej liczby podać także średni błąd oszacowania lub też podać przedział liczbowy, który zawierałby, ze znanym prawdopodobieństwem, rzeczywistą wartość szukanego wskaźnika.

Uwagi do przykładu

- **Uwaga 1:** Wylosowana próba respondentów nie daje pełnej gwarancji, że udział głosów na daną partię w tej próbie będzie taki sam, jak w całej populacji. Istnieje jednak pewna zależność między licznością próby a dokładnością oszacowania danego wskaźnika, do czego wrócimy.
- **Uwaga 2:** Wskazane byłoby, aby oprócz pojedycznej liczby podać także średni błąd oszacowania lub też podać przedział liczbowy, który zawierałby, ze znanym prawdopodobieństwem, rzeczywistą wartość szukanego wskaźnika.
- **Uwaga 3:** Zauważymy, że gdybyśmy osobom głosującym na PiS przyporządkowali wartość 1, a pozostałym wartość 0, to udział głosujących na tę partię będzie równy średniej arytmetycznej ze zbioru zer i jedynek (taką średnią możemy zdefiniować zarówno dla próby, jak i dla populacji).

Prawo wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne

W dalszych rozważaniach przedstawimy słabe prawo wielkich liczb, będące jednym z podstawowych zasad rachunku prawdopodobieństwa oraz centralne twierdzenie graniczne, które wykorzystamy w zagadnieniach szacowania nieznanych wskaźników (parametrów) populacji.

Prawo wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne

W dalszych rozważaniach przedstawimy słabe prawo wielkich liczb, będące jednym z podstawowych zasad rachunku prawdopodobieństwa oraz centralne twierdzenie graniczne, które wykorzystamy w zagadnieniach szacowania nieznanych wskaźników (parametrów) populacji.

Prawo wielkich liczb zostało sformułowane po raz pierwszy przez Jakuba Bernoulliego, żyjącego na przełomie XVII i XVIII wieku, ale opublikowane zostało dopiero w 1913 r., tj. 200 lat po śmierci jego twórcy. Bernoulli nazwał je ”złotym twierdzeniem”.

Prawo wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne

W dalszych rozważaniach przedstawimy słabe prawo wielkich liczb, będące jednym z podstawowych zasad rachunku prawdopodobieństwa oraz centralne twierdzenie graniczne, które wykorzystamy w zagadnieniach szacowania nieznanych wskaźników (parametrów) populacji.

Prawo wielkich liczb zostało sformułowane po raz pierwszy przez Jakuba Bernoulliego, żyjącego na przełomie XVII i XVIII wieku, ale opublikowane zostało dopiero w 1913 r., tj. 200 lat po śmierci jego twórcy. Bernoulli nazwał je ”złotym twierdzeniem”.

Z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim 1 można się spodziewać, iż przy dostatecznie wielkiej liczbie powtórzeń eksperymentu losowego, z których każdy kończy się sukcesem lub porażką, częstość wystąpienia sukcesu w serii eksperymentów będzie się dowolnie mało różniła od jego prawdopodobieństwa.

Prawo wielkich liczb Bernoulliego

Przykład.

- Załóżmy, że przeprowadzamy serię eksperymentów polegających na rzucaniu monetą.

Prawo wielkich liczb Bernoulliego

Przykład.

- Załóżmy, że przeprowadzamy serię eksperymentów polegających na rzucaniu monetą.
- Niech sukcesem będzie wyrzucenie orła w pojedynczym rzucie. Jeśli moneta jest symetryczna, to prawdopodobieństwo sukcesu w każdym eksperymencie wynosi $\frac{1}{2}$.

Prawo wielkich liczb Bernoulliego

Przykład.

- Załóżmy, że przeprowadzamy serię eksperymentów polegających na rzucaniu monetą.
- Niech sukcesem będzie wyrzucenie orła w pojedynczym rzucie. Jeśli moneta jest symetryczna, to prawdopodobieństwo sukcesu w każdym eksperymencie wynosi $\frac{1}{2}$.
- Załóżmy, że po każdym rzucie obliczamy częstość wyrzuconych orłów w serii dotychczas wykonanych rzutów (czyli iloraz liczby orłów do liczby rzutów).

Prawo wielkich liczb Bernoulliego

Przykład.

- Załóżmy, że przeprowadzamy serię eksperymentów polegających na rzucaniu monetą.
- Niech sukcesem będzie wyrzucenie orła w pojedynczym rzucie. Jeśli moneta jest symetryczna, to prawdopodobieństwo sukcesu w każdym eksperymencie wynosi $\frac{1}{2}$.
- Załóżmy, że po każdym rzucie obliczamy częstość wyrzuconych orłów w serii dotychczas wykonanych rzutów (czyli iloraz liczby orłów do liczby rzutów).
- Prawo Bernoulliego mówi, że szansa na to, by obliczona częstość była bardzo bliska prawdopodobieństwu $\frac{1}{2}$ (a dokładniej – aby różniła się od niego dowolnie mało), zmierza do 1 wraz ze zwiększaniem liczby rzutów.

Słabe prawo wielkich liczb

Podobne prawo można także sformułować w odniesienu do średniej z próby losowej (w szczególnym przypadku, częstość wystąpienia sukcesu w serii n eksperymentów możemy traktować jak średnią z n-elementowej próby składającej się z zer i jedynek – zob. Uwaga 3). Prawo to nazywamy **słabym prawem wielkich liczb**:

Słabe prawo wielkich liczb

Podobne prawo można także sformułować w odniesienu do średniej z próby losowej (w szczególnym przypadku, częstość wystąpienia sukcesu w serii n eksperymentów możemy traktować jak średnią z n-elementowej próby składającej się z zer i jedynek – zob. Uwaga 3). Prawo to nazywamy **słabym prawem wielkich liczb**:

Jeśli z dowolnej populacji wylosuje się próbkę o liczności n i jeśli dla takiej próbki obliczy się średnią arytmetyczną, to prawdopodobieństwo tego, że średnia próbkowa będzie różnić się dowolnie mało od średniej dla całej populacji, zbliża się do 1 wraz ze wzrostem n.

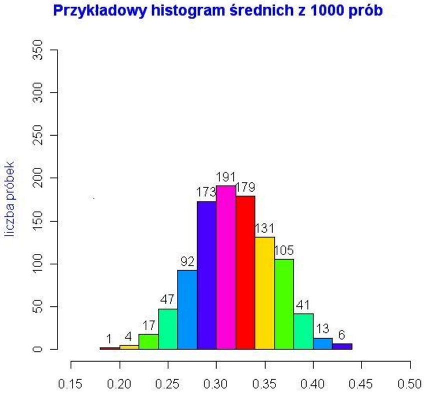
Słabe prawo wielkich liczb

Podobne prawo można także sformułować w odniesienu do średniej z próby losowej (w szczególnym przypadku, częstość wystąpienia sukcesu w serii n eksperymentów możemy traktować jak średnią z n-elementowej próby składającej się z zer i jedynek – zob. Uwaga 3). Prawo to nazywamy **słabym prawem wielkich liczb**:

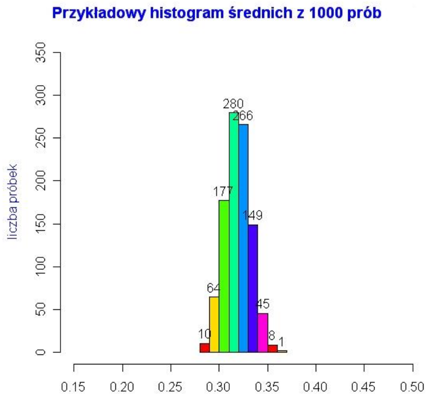
Jeśli z dowolnej populacji wylosuje się próbkę o liczności n i jeśli dla takiej próbki obliczy się średnią arytmetyczną, to prawdopodobieństwo tego, że średnia próbkowa będzie różnić się dowolnie mało od średniej dla całej populacji, zbliża się do 1 wraz ze wzrostem n.

Jest to tzw. zbieżność wg prawdopodobieństwa. Mówiąc w uproszczeniu, zwiększanie liczebności próby, zwiększa szansę, że średnia z takiej próby "trafi" w średnią z populacji.

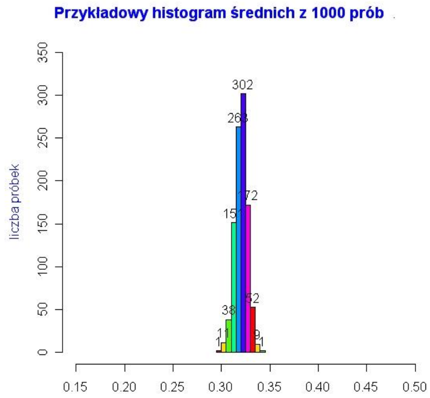
Gdybyśmy posiadali wiele n-elementowych próbek, to histogram średnich z tych próbek przybliżałby tzw. rozkład średniej z próby. Przykład histogramu dla 1000 próbek (każda o liczności $n = 150$) przybliżającego rozkład średniej z próby przedstawia wykres.



Jeśli zwiększymy liczebność każdej próbki, np. do $n = 1000$, wówczas histogram średnich obliczonych z tych próbek będzie bardziej "skupiony" wokół średniej z populacji (tu średnia z populacji= 0,32). Histogram poniżej wykonano dla 1000 próbek.



Załóżmy teraz, że $n = 5000$. Koncentracja średnich z próbek wokół średniej z populacji jest tu jeszcze bardziej wyraźna. W tym przypadku średnie dla większości próbek są bardzo bliskie wartości średniej dla całej populacji (równej nadal 0,32).



Centralne twierdzenie graniczne – ilustracja na przykładzie

- Wróćmy do wykresu histogramu średnich z próbek liczących po $n = 1000$ elementów.

Centralne twierdzenie graniczne – ilustracja na przykładzie

- Wróćmy do wykresu histogramu średnich z próbek liczących po $n = 1000$ elementów.
- Na wykresie tym na osi pionowej odłożone są liczby próbek, dla których średnie należały do poszczególnych podprzedziałów liczbowych, każdy o długości 0,01 (podprzedziały te są określone przez podstawy słupków).

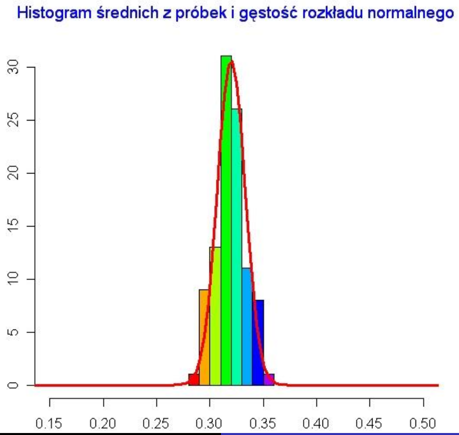
Centralne twierdzenie graniczne – ilustracja na przykładzie

- Wróćmy do wykresu histogramu średnich z próbek liczących po $n = 1000$ elementów.
- Na wykresie tym na osi pionowej odłożone są liczby próbek, dla których średnie należały do poszczególnych podprzedziałów liczbowych, każdy o długości 0,01 (podprzedziały te są określone przez podstawy słupków).
- Wykreślimy teraz podobny histogram, odkładając na osi pionowej liczebności względne, przeliczone na jednostkę długości przedziałów (tj. częstości podzielone przez długości podprzedziałów).

Centralne twierdzenie graniczne – ilustracja na przykładzie

- Wróćmy do wykresu histogramu średnich z próbek liczących po $n = 1000$ elementów.
- Na wykresie tym na osi pionowej odłożone są liczby próbek, dla których średnie należały do poszczególnych podprzedziałów liczbowych, każdy o długości 0,01 (podprzedziały te są określone przez podstawy słupków).
- Wykreślimy teraz podobny histogram, odkładając na osi pionowej liczebności względne, przeliczone na jednostkę długości przedziałów (tj. częstości podzielone przez długości podprzedziałów).
- Na tym samym wykresie umieśćmy dodatkową krzywą, który przybliża kształt histogramu sporządzonego na podstawie średnich z bardzo wielu próbek (w tym przypadku z 1000 próbek, zob. następny wykres).

Zauważymy, że wykreślona krzywa przypomina krzywą gęstości rozkładu normalnego. Wykres ten ilustruje w uproszczeniu sens centralnego twierdzenia granicznego przedstawionego dalej.



Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne jest kolejnym, ważnym twierdzeniem rachunku prawdopodobieństwa.

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne jest kolejnym, ważnym twierdzeniem rachunku prawdopodobieństwa.

W skócie mówi ono, iż rozkład standaryzowanej średniej arytmetycznej z próby dąży do rozkładu normalnego $N(0, 1)$, gdy liczebność n próby dąży do nieskończoności (o standaryzacji była mowa przy okazji omawiania rozkładów).

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne jest kolejnym, ważnym twierdzeniem rachunku prawdopodobieństwa.

W skócie mówi ono, iż rozkład standaryzowanej średniej arytmetycznej z próby dąży do rozkładu normalnego $N(0, 1)$, gdy liczebność n próby dąży do nieskończoności (o standaryzacji była mowa przy okazji omawiania rozkładów).

Upraszczając nieco, możemy powyższe sformułowanie wyjaśnić następująco. Jeśli wylosujemy z populacji bardzo wiele n-elementowych próbek i obliczymy dla każdej z nich średnią arytmetyczną to:

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne jest kolejnym, ważnym twierdzeniem rachunku prawdopodobieństwa.

W skócie mówi ono, iż rozkład standaryzowanej średniej arytmetycznej z próby dąży do rozkładu normalnego $N(0, 1)$, gdy liczebność n próby dąży do nieskończoności (o standaryzacji była mowa przy okazji omawiania rozkładów).

Upraszczając nieco, możemy powyższe sformułowanie wyjaśnić następująco. Jeśli wylosujemy z populacji bardzo wiele n-elementowych próbek i obliczymy dla każdej z nich średnią arytmetyczną to:

- histogram liczebności względnych (w przeliczeniu na jednostkę długości) dla średnich próbkowych będzie przybierać **kształt zbliżony do krzywej gęstości rozkładu normalnego**, o ile liczności n próbek będą duże.

Własności średnich próbkowych

W uzupełnieniu do przedstawionego wyjaśnienia warto jeszcze przedstawić dwie własności średnich próbkowych, z których korzysta się m.in. przy standaryzacji średniej arytmetycznej z próby (o czym jest mowa w centralnym tw. granicznym):

Własności średnich próbkowych

W uzupełnieniu do przedstawionego wyjaśnienia warto jeszcze przedstawić dwie własności średnich próbkowych, z których korzysta się m.in. przy standaryzacji średniej arytmetycznej z próby (o czym jest mowa w centralnym tw. granicznym):

- **Własność 1.** Gdybyśmy wylosowali bardzo dużo n-elementowych próbek (teoretycznie zakłada się nieskończnie wiele próbek losowanych z nieskończonej populacji) i obliczyli dla każdej z nich średnią arytmetyczną, czyli średnie próbkowe, a następnie średnią ze średnich, to okazałoby się, że wielkość ta jest **równa średniej badanej cechy w całej populacji**.

Własności średnich próbkowych

W uzupełnieniu do przedstawionego wyjaśnienia warto jeszcze przedstawić dwie własności średnich próbkowych, z których korzysta się m.in. przy standaryzacji średniej arytmetycznej z próby (o czym jest mowa w centralnym tw. granicznym):

- **Własność 1.** Gdybyśmy wylosowali bardzo dużo *n*-elementowych próbek (teoretycznie zakłada się nieskończnie wiele próbek losowanych z nieskończonej populacji) i obliczyli dla każdej z nich średnią arytmetyczną, czyli średnie próbkowe, a następnie średnią ze średnich, to okazałoby się, że wielkość ta jest **równa średniej badanej cechy w całej populacji**. Średnią dla populacji będziemy dalej oznaczać przez μ.

Własności średnich próbkowych

W uzupełnieniu do przedstawionego wyjaśnienia warto jeszcze przedstawić dwie własności średnich próbkowych, z których korzysta się m.in. przy standaryzacji średniej arytmetycznej z próby (o czym jest mowa w centralnym tw. granicznym):

- **Własność 1.** Gdybyśmy wylosowali bardzo dużo *n*-elementowych próbek (teoretycznie zakłada się nieskończnie wiele próbek losowanych z nieskończonej populacji) i obliczyli dla każdej z nich średnią arytmetyczną, czyli średnie próbkowe, a następnie średnią ze średnich, to okazałoby się, że wielkość ta jest **równa średniej badanej cechy w całej populacji**. Średnią dla populacji będziemy dalej oznaczać przez μ.

  W języku formalnym przedstawioną własność zapisujemy: $\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$.

Własności średnich próbkowych – c.d.

Druga własność średnich próbkowych brzmi następująco:

Własności średnich próbkowych – c.d.

Druga własność średnich próbkowych brzmi następująco:

- **Własność 2.** Gdybyśmy, mając nieskończenie wiele n-elementowych próbek, obliczyli wariancję średnich próbkowych, to okazałoby się, że jest ona n **razy mniejsza niż wariancja w populacji**.

Własności średnich próbkowych – c.d.

Druga własność średnich próbkowych brzmi następująco:

- **Własność 2.** Gdybyśmy, mając nieskończenie wiele n-elementowych próbek, obliczyli wariancję średnich próbkowych, to okazałoby się, że jest ona n **razy mniejsza niż wariancja w populacji**. Wariancję w populacji oznaczać będziemy dalej przez σ^2.

Własności średnich próbkowych – c.d.

Druga własność średnich próbkowych brzmi następująco:

- **Własność 2.** Gdybyśmy, mając nieskończenie wiele n-elementowych próbek, obliczyli wariancję średnich próbkowych, to okazałoby się, że jest ona n **razy mniejsza niż wariancja w populacji**. Wariancję w populacji oznaczać będziemy dalej przez σ^2. W zapisie formalnym własność ta ma postać: $\mathrm{D}^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Własności średnich próbkowych – c.d.

Druga własność średnich próbkowych brzmi następująco:

- **Własność 2.** Gdybyśmy, mając nieskończenie wiele n-elementowych próbek, obliczyli wariancję średnich próbkowych, to okazałoby się, że jest ona n **razy mniejsza niż wariancja w populacji**. Wariancję w populacji oznaczać będziemy dalej przez σ^2. W zapisie formalnym własność ta ma postać: $\mathrm{D}^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.
- Ponieważ w mianowniku po prawej stronie występuje n, więc wynika stąd wniosek, że zwiększając liczność n wszystkich próbek, zmniejszamy tym samym zmienność średnich wyznaczonych z takich próbek. Wyjaśnia to m.in. dlaczego wraz ze wzrostem n obserwowaliśmy rosnącą koncentrację histogramów średnich próbkowych wokół średniej z populacji (zob. wcześniejsze wykresy).

Podsumowanie rozważanych przykładów

- Dotychczasowe rozważania pokazują, że możliwe jest przybliżanie rzeczywistych wartości pewnych wskaźników (parametrów) populacji na podstawie próby losowej.

Podsumowanie rozważanych przykładów

- Dotychczasowe rozważania pokazują, że możliwe jest przybliżanie rzeczywistych wartości pewnych wskaźników (parametrów) populacji na podstawie próby losowej.
- Prawdopodobieństwo ”trafienia” w prawdziwą wartość parametru jest tym większe, im większa jest liczność n próby.

Podsumowanie rozważanych przykładów

- Dotychczasowe rozważania pokazują, że możliwe jest przybliżanie rzeczywistych wartości pewnych wskaźników (parametrów) populacji na podstawie próby losowej.
- Prawdopodobieństwo "trafienia" w prawdziwą wartość parametru jest tym większe, im większa jest liczność n próby.
- Jeśli szukanym parametrem jest średnia określonej cechy w populacji i jeśli dysponujemy dużą próbą (często wystarczy $n \geq 30$), wówczas możemy odwołać się do własności rozkładu normalnego, w celu wyznaczenia oszacowania szukanej średniej.

Podsumowanie rozważanych przykładów

- Dotychczasowe rozważania pokazują, że możliwe jest przybliżanie rzeczywistych wartości pewnych wskaźników (parametrów) populacji na podstawie próby losowej.
- Prawdopodobieństwo "trafienia" w prawdziwą wartość parametru jest tym większe, im większa jest liczność n próby.
- Jeśli szukanym parametrem jest średnia określonej cechy w populacji i jeśli dysponujemy dużą próbą (często wystarczy $n \geq 30$), wówczas możemy odwołać się do własności rozkładu normalnego, w celu wyznaczenia oszacowania szukanej średniej.
- Przybliżanie (estymowanie) nieznanych parametrów populacji na podstawie danych z próby losowej jest zadaniem **teorii estymacji**, szerzej–**wnioskowania statystycznego**.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

- Przypuśćmy, że chcemy zbadać np. wartość średnią lub inne charakterystyki pewnej cechy X (zmiennej losowej) w populacji generalnej.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

- Przypuśćmy, że chcemy zbadać np. wartość średnią lub inne charakterystyki pewnej cechy X (zmiennej losowej) w populacji generalnej.
- W tym celu przeprowadzamy eksperyment losowy polegający na n-krotnym losowaniu ze zwracaniem elementów z tej populacji (tzw. **losowanie niezależne**) oraz rejestrowaniu wartości badanej cechy w kolejnych losowaniach.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

- Przypuśćmy, że chcemy zbadać np. wartość średnią lub inne charakterystyki pewnej cechy X (zmiennej losowej) w populacji generalnej.
- W tym celu przeprowadzamy eksperyment losowy polegający na n-krotnym losowaniu ze zwracaniem elementów z tej populacji (tzw. **losowanie niezależne**) oraz rejestrowaniu wartości badanej cechy w kolejnych losowaniach.
- Oznaczmy przez X_i potencjalny wynik pomiaru badanej cechy, jaki może pojawić się u i-tego elementu.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

- Przypuśćmy, że chcemy zbadać np. wartość średnią lub inne charakterystyki pewnej cechy X (zmiennej losowej) w populacji generalnej.
- W tym celu przeprowadzamy eksperyment losowy polegający na n-krotnym losowaniu ze zwracaniem elementów z tej populacji (tzw. **losowanie niezależne**) oraz rejestrowaniu wartości badanej cechy w kolejnych losowaniach.
- Oznaczmy przez X_i potencjalny wynik pomiaru badanej cechy, jaki może pojawić się u i-tego elementu.
- Przed wykonaniem eksperymentu wynik pomiaru X_i jest zmienną losową, ponieważ nie wiemy, jaki element zostanie wylosowany w i-tej kolejności, a tym samym – jaki będzie wynik pomiaru dla tego elementu.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

- Po wylosowaniu i dokonaniu pomiaru uzyskujemy konkretną wartość x_i, tj. pojedynczą realizację zmiennej X_i.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

- Po wylosowaniu i dokonaniu pomiaru uzyskujemy konkretną wartość x_i, tj. pojedyczną realizację zmiennej X_i.
- Ponieważ losowanie z populacji jest niezależne, więc zmienne:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

są także niezależne i mają taki sam rozkład jak rozkład badanej cechy X.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

- Po wylosowaniu i dokonaniu pomiaru uzyskujemy konkretną wartość x_i, tj. pojedynczą realizację zmiennej X_i.
- Ponieważ losowanie z populacji jest niezależne, więc zmienne:

  $$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

  są także niezależne i mają taki sam rozkład jak rozkład badanej cechy X.
- Przedstawiony ciąg zmiennych losowych nazywamy ***n*-elementową próbą losową** (prostą).

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

- Po wylosowaniu i dokonaniu pomiaru uzyskujemy konkretną wartość x_i, tj. pojedynczą realizację zmiennej X_i.
- Ponieważ losowanie z populacji jest niezależne, więc zmienne:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

są także niezależne i mają taki sam rozkład jak rozkład badanej cechy X.
- Przedstawiony ciąg zmiennych losowych nazywamy ***n*-elementową próbą losową** (prostą).
- **Realizacją próby losowej** jest ciąg konkretnych wartości

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

zaobserwowanych w trakcie pomiaru badanej cechy.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie n-elementową próbą losową.

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie n-elementową próbą losową.

Statystyką nazywamy zmienną losową T_n będącą dowolną funkcją próby losowej, co zapisujemy ogólnie w postaci:

$$T_n = f(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie n-elementową próbą losową.
Statystyką nazywamy zmienną losową T_n będącą dowolną funkcją próby losowej, co zapisujemy ogólnie w postaci:

$$T_n = f(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Przykładami statystyk są: średnia arytmetyczna z próby oraz odchylenie standardowe z próby, zdefiniowane wzorami:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}.$$

Teoretyczne podejście do zagadnień wnioskowania

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie n-elementową próbą losową.

Statystyką nazywamy zmienną losową T_n będącą dowolną funkcją próby losowej, co zapisujemy ogólnie w postaci:

$$T_n = f(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Przykładami statystyk są: średnia arytmetyczna z próby oraz odchylenie standardowe z próby, zdefiniowane wzorami:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}.$$

Zauważymy, że zarówno średnia arytmetyczna, jak i odchylenie standardowe są tu oznaczone dużymi literami, dla podkreślenia, iż nie są to pojedyncze liczby, ale zmienne losowe, ponieważ dotyczą losowej próby.

Wnioskowanie statystyczne

- Wnioskowaniem statystycznym nazywamy zbiór reguł uogólniania wyników z próby losowej na populację generalną.

Wnioskowanie statystyczne

- Wnioskowaniem statystycznym nazywamy zbiór reguł uogólniania wyników z próby losowej na populację generalną.
- W ramach wnioskowania statystycznego wyróżniamy:

Wnioskowanie statystyczne

- Wnioskowaniem statystycznym nazywamy zbiór reguł uogólniania wyników z próby losowej na populację generalną.
- W ramach wnioskowania statystycznego wyróżniamy:
  - estymację,

Wnioskowanie statystyczne

- Wnioskowaniem statystycznym nazywamy zbiór reguł uogólniania wyników z próby losowej na populację generalną.
- W ramach wnioskowania statystycznego wyróżniamy:
  - estymację,
  - weryfikację hipotez statystycznych.

Wnioskowanie statystyczne

- Wnioskowaniem statystycznym nazywamy zbiór reguł uogólniania wyników z próby losowej na populację generalną.
- W ramach wnioskowania statystycznego wyróżniamy:
  - estymację,
  - weryfikację hipotez statystycznych.
- **Teoria estymacji** zajmuje się metodami szacowania (estymacji) nieznanego rozkładu lub nieznanych parametrów rozkładu badanej cechy X w populacji generalnej.

Wnioskowanie statystyczne

- Wnioskowaniem statystycznym nazywamy zbiór reguł uogólniania wyników z próby losowej na populację generalną.
- W ramach wnioskowania statystycznego wyróżniamy:
  - estymację,
  - weryfikację hipotez statystycznych.
- **Teoria estymacji** zajmuje się metodami szacowania (estymacji) nieznanego rozkładu lub nieznanych parametrów rozkładu badanej cechy X w populacji generalnej.
- **Teoria weryfikacji hipotez** zajmuje się metodami testowania dowolnego przypuszczenia dotyczącego nieznanego rozkładu lub nieznanych parametrów rozkładu badanej cechy X w populacji generalnej.

Podstawy estymacji
Rodzaje estymacji

Wyróżniamy:

1. estymację parametryczną,
2. estymację nieparametryczną.

Podstawy estymacji
Rodzaje estymacji

Wyróżniamy:

1. estymację parametryczną,
2. estymację nieparametryczną.

Inny podział na:

1. estymację punktową,
2. estymację przedziałową.

Podstawy estymacji
Rodzaje estymacji

Wyróżniamy:

1. estymację parametryczną,
2. estymację nieparametryczną.

Inny podział na:

1. estymację punktową,
2. estymację przedziałową.

- **Estymacja parametryczna** zajmuje się szacowaniem parametrów rozkładu populacji w przypadku, gdy znamy klasę rozkładów, do której należy rozkład badanej cechy X (np. wiemy, że jest to rozkład normalny, ale nie znamy jego parametrów μ i σ, które estymujemy).

Podstawy estymacji
Rodzaje estymacji

Wyróżniamy:

1. estymację parametryczną,
2. estymację nieparametryczną.

Inny podział na:

1. estymację punktową,
2. estymację przedziałową.

- **Estymacja parametryczna** zajmuje się szacowaniem parametrów rozkładu populacji w przypadku, gdy znamy klasę rozkładów, do której należy rozkład badanej cechy X (np. wiemy, że jest to rozkład normalny, ale nie znamy jego parametrów μ i σ, które estymujemy).
- Jeżeli nie znamy klasy rozkładów, do której należy rozkład badanej zmiennej X, to estymację nazywamy **nieparametryczną**.

Podstawy estymacji
Estymacja punktowa

Podstawy estymacji
Estymacja punktowa

- **Estymacja punktowa** polega na podaniu jednej wartości (względnie wektora wartości) będącej oszacowaniem nieznanego parametru (względnie wektora parametrów). Ilustracją takiego sposobu estymacji jest oszacowanie udziału głosów na PiS (0,35 lub zamiennie 35%) przedstawione w przykładzie wprowadzającym.

Podstawy estymacji
Estymacja punktowa

- **Estymacja punktowa** polega na podaniu jednej wartości (względnie wektora wartości) będącej oszacowaniem nieznanego parametru (względnie wektora parametrów). Ilustracją takiego sposobu estymacji jest oszacowanie udziału głosów na PiS (0,35 lub zamiennie 35%) przedstawione w przykładzie wprowadzającym.
- Określenie "estymacja punktowa" bierze się stąd, że dla każdego parametru populacji znajdujemy jedną liczbę (na podstawie realizacji próby), w taki sposób, aby była ona możliwie najlepszym przybliżeniem nieznanego parametru. Jest to tzw. ocena punktowa parametru.

Podstawy estymacji
Estymacja punktowa

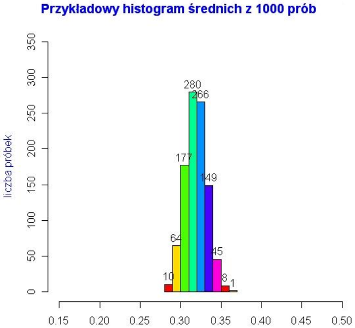
- **Estymacja punktowa** polega na podaniu jednej wartości (względnie wektora wartości) będącej oszacowaniem nieznanego parametru (względnie wektora parametrów). Ilustracją takiego sposobu estymacji jest oszacowanie udziału głosów na PiS (0,35 lub zamiennie 35%) przedstawione w przykładzie wprowadzającym.
- Określenie "estymacja punktowa" bierze się stąd, że dla każdego parametru populacji znajdujemy jedną liczbę (na podstawie realizacji próby), w taki sposób, aby była ona możliwie najlepszym przybliżeniem nieznanego parametru. Jest to tzw. ocena punktowa parametru.
- Ocena punktowa jest wyznaczana na podstawie wartości pewnej statystyki, o własnościach upoważniających nas do szacowania za jej pomocą danego parametru.

Podstawy estymacji
Estymacja punktowa

- **Estymacja punktowa** polega na podaniu jednej wartości (względnie wektora wartości) będącej oszacowaniem nieznanego parametru (względnie wektora parametrów). Ilustracją takiego sposobu estymacji jest oszacowanie udziału głosów na PiS (0,35 lub zamiennie 35%) przedstawione w przykładzie wprowadzającym.
- Określenie "estymacja punktowa" bierze się stąd, że dla każdego parametru populacji znajdujemy jedną liczbę (na podstawie realizacji próby), w taki sposób, aby była ona możliwie najlepszym przybliżeniem nieznanego parametru. Jest to tzw. ocena punktowa parametru.
- Ocena punktowa jest wyznaczana na podstawie wartości pewnej statystyki, o własnościach upoważniających nas do szacowania za jej pomocą danego parametru.

Podstawy estymacji

Należy zaznaczyć, że ocena punktowana na ogół nie pokrywa się z prawdziwą wartością parametru. Na rozważanych wcześniej histogramach można było zauważyć, że dla pewnej części próbek wartości średnie odbiegały w mniejszym lub większy stopniu od średniej w populacji (zob. wykres poniżej).



Podstawy estymacji
Estymacja przedziałowa

- W praktyce mamy tylko jedną próbę, zatem nie mamy pewności, jak bardzo wartość obliczona z dostępnej próby różni się od szukanego parametru.

Podstawy estymacji
Estymacja przedziałowa

- W praktyce mamy tylko jedną próbę, zatem nie mamy pewności, jak bardzo wartość obliczona z dostępnej próby różni się od szukanego parametru.
- Bardziej realistyczne, zamiast oceny punktowej, wydaje się skonstruowanie przedziału, który z zadanym z góry prawdopodobieństwem, bliskim jedności, pokrywałby nieznaną wartość tego parametru. Jest to zadanie **estymacji przedziałowej**.

Podstawy estymacji
Estymacja przedziałowa

- W praktyce mamy tylko jedną próbę, zatem nie mamy pewności, jak bardzo wartość obliczona z dostępnej próby różni się od szukanego parametru.
- Bardziej realistyczne, zamiast oceny punktowej, wydaje się skonstruowanie przedziału, który z zadanym z góry prawdopodobieństwem, bliskim jedności, pokrywałby nieznaną wartość tego parametru. Jest to zadanie **estymacji przedziałowej**.
- Przedział taki nosi miano **przedziału ufności**.

Podstawy estymacji
Estymacja przedziałowa

- W praktyce mamy tylko jedną próbę, zatem nie mamy pewności, jak bardzo wartość obliczona z dostępnej próby różni się od szukanego parametru.
- Bardziej realistyczne, zamiast oceny punktowej, wydaje się skonstruowanie przedziału, który z zadanym z góry prawdopodobieństwem, bliskim jedności, pokrywałby nieznaną wartość tego parametru. Jest to zadanie **estymacji przedziałowej**.
- Przedział taki nosi miano **przedziału ufności**.
- Konstrukcja przedziału ufności jest równoznaczna z podaniem jego dwóch krańców. Ponieważ krańce te są zależnego od wyników w losowej próbie, więc cały przedział ma także charakter losowy.

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji na podstawie dużej próby

- Do budowy **przedziału ufności dla wartości średniej μ w populacji** wykorzystamy wnioski płynące z centralnego tw. granicznego, w tym także własności 1 i 2 (będziemy zakładać, że dysponujemy odpowiednio dużą próbą).

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji na podstawie dużej próby

- Do budowy **przedziału ufności dla wartości średniej μ w populacji** wykorzystamy wnioski płynące z centralnego tw. granicznego, w tym także własności 1 i 2 (będziemy zakładać, że dysponujemy odpowiednio dużą próbą).
- Wyprowadzimy wzór na przedział, który z prawdopodobieństwem $1 - \alpha \in (0, 1)$ zawierać będzie średnią μ.

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji na podstawie dużej próby

- Do budowy **przedziału ufności dla wartości średniej μ w populacji** wykorzystamy wnioski płynące z centralnego tw. granicznego, w tym także własności 1 i 2 (będziemy zakładać, że dysponujemy odpowiednio dużą próbą).
- Wyprowadzimy wzór na przedział, który z prawdopodobieństwem $1-\alpha \in (0,1)$ zawierać będzie średnią μ.
- Liczbę $1-\alpha$ nazywamy **poziomem ufności**. Przyjmuje się z reguły, że jest on równy 0,9 lub 0,95 (niekiedy 0,99).

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji na podstawie dużej próby

- Do budowy **przedziału ufności dla wartości średniej μ w populacji** wykorzystamy wnioski płynące z centralnego tw. granicznego, w tym także własności 1 i 2 (będziemy zakładać, że dysponujemy odpowiednio dużą próbą).
- Wyprowadzimy wzór na przedział, który z prawdopodobieństwem $1 - \alpha \in (0, 1)$ zawierać będzie średnią μ.
- Liczbę $1 - \alpha$ nazywamy **poziomem ufności**. Przyjmuje się z reguły, że jest on równy 0,9 lub 0,95 (niekiedy 0,99).
- Do wyznaczenia przedziału ufności wystarczą nam dane z jednej próbki. W przypadku, gdy jej liczność jest duża (często wystarczy $n \geq 30$), wówczas przyjmujemy, że rozkład średniej $\bar{X}$ z próbki jest zbliżony do rozkładu $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji w przypadku dużej próby – c.d.

- Skoro $\bar{X}$ ma w przypadku dużej próby rozkład zbliżony do rozkładu $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, to zmienna losowa:

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ma rozkład zbliżony do rozkładu $N(0, 1)$ (o tym mniej więcej mówi centralne twierdzenie graniczne).

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji w przypadku dużej próby – c.d.

- Skoro $\bar{X}$ ma w przypadku dużej próby rozkład zbliżony do rozkładu $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, to zmienna losowa:

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

  ma rozkład zbliżony do rozkładu $N(0, 1)$ (o tym mniej więcej mówi centralne twierdzenie graniczne).
- Ustalmy poziom ufności $1 - \alpha$. Niech u_α będzie kwantylem rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu $N(0, 1)$.

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji w przypadku dużej próby – c.d.

- Skoro $\bar{X}$ ma w przypadku dużej próby rozkład zbliżony do rozkładu $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, to zmienna losowa:

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ma rozkład zbliżony do rozkładu $N(0, 1)$ (o tym mniej więcej mówi centralne twierdzenie graniczne).

- Ustalmy poziom ufności $1 - \alpha$. Niech u_α będzie kwantylem rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu $N(0, 1)$.
- Wówczas dla wyżej zdefiniowanej zmiennej U zachodzi:

$$P(|U| < u_\alpha) = P(-u_\alpha < U < u_\alpha) \approx 1 - \alpha.$$

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji w przypadku dużej próby – c.d.

- Po podstawieniu w miejsce zmiennej U wyrażenia $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ i po dokonaniu kilku przekształceń, otrzymujemy:

$$P(\bar{X} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 1 - \alpha,$$

co oznacza, iż z prawdopodobieństwem równym w przybliżeniu $1 - \alpha$ możemy oczekiwać, iź przedział o podanych poniżej krańcach zawiera nieznany parametr μ:

$$\bar{X} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Podstawy estymacji

Wyprowadzenie przedziału ufności dla średniej w populacji w przypadku dużej próby – c.d.

- Po podstawieniu w miejsce zmiennej U wyrażenia $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ i po dokonaniu kilku przekształceń, otrzymujemy:

$$P(\bar{X} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 1 - \alpha,$$

co oznacza, iż z prawdopodobieństwem równym w przybliżeniu $1 - \alpha$ możemy oczekiwać, iż przedział o podanych poniżej krańcach zawiera nieznany parametr μ:

$$\bar{X} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **Uwaga:** Jeśli nie znamy także parametru populacji σ, wówczas zastępujemy go przybliżeniem z próby, tj. statystyką S.

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

- W ramach ilustracji, wyznaczymy przedział, który zawierałby rzeczywisty udział wyborców głosujących na PiS w wyborach 2007 r. (zob. przykład wprowadzający).

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

- W ramach ilustracji, wyznaczymy przedział, który zawierałby rzeczywisty udział wyborców głosujących na PiS w wyborach 2007 r. (zob. przykład wprowadzający).
- Niech $1 - \alpha = 0,95$, wówczas $\alpha = 0,05$, $\frac{\alpha}{2} = 0,025$, a stąd $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$. Kwantyl rzędu $0,975$ rozkładu $N(0,1)$ jest równy $1,96$ (zob. tablice dystrybuanty $N(0,1)$).

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

- W ramach ilustracji, wyznaczymy przedział, który zawierałby rzeczywisty udział wyborców głosujących na PiS w wyborach 2007 r. (zob. przykład wprowadzający).
- Niech $1 - \alpha = 0,95$, wówczas $\alpha = 0,05$, $\frac{\alpha}{2} = 0,025$, a stąd $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$. Kwantyl rzędu $0,975$ rozkładu $N(0,1)$ jest równy $1,96$ (zob. tablice dystrybuanty $N(0,1)$).
- Mamy na podstawie danych z próby (dane z sondażu): $n = 1018, \quad \bar{x} = 0,35, \quad s \approx 0,48$.

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

- W ramach ilustracji, wyznaczymy przedział, który zawierałby rzeczywisty udział wyborców głosujących na PiS w wyborach 2007 r. (zob. przykład wprowadzający).
- Niech $1 - \alpha = 0,95$, wówczas $\alpha = 0,05$, $\frac{\alpha}{2} = 0,025$, a stąd $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$. Kwantyl rzędu $0,975$ rozkładu $N(0,1)$ jest równy $1,96$ (zob. tablice dystrybuanty $N(0,1)$).
- Mamy na podstawie danych z próby (dane z sondażu): $n = 1018, \quad \bar{x} = 0,35, \quad s \approx 0,48$.
- Krańce przedziału ufności dla szukanego wskaźnika to:

$$0,35 - 1,96 \cdot \frac{0,48}{\sqrt{1018}}; \qquad 0,35 + 1,96 \cdot \frac{0,48}{\sqrt{1018}}$$

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

- W ramach ilustracji, wyznaczymy przedział, który zawierałby rzeczywisty udział wyborców głosujących na PiS w wyborach 2007 r. (zob. przykład wprowadzający).
- Niech $1-\alpha = 0,95$, wówczas $\alpha = 0,05$, $\frac{\alpha}{2} = 0,025$, a stąd $1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$. Kwantyl rzędu $0,975$ rozkładu $N(0,1)$ jest równy $1,96$ (zob. tablice dystrybuanty $N(0,1)$).
- Mamy na podstawie danych z próby (dane z sondażu): $n = 1018, \quad \bar{x} = 0,35, \quad s \approx 0,48$.
- Krańce przedziału ufności dla szukanego wskaźnika to:

$$0,35 - 1,96 \cdot \frac{0,48}{\sqrt{1018}}; \qquad 0,35 + 1,96 \cdot \frac{0,48}{\sqrt{1018}}$$

Otrzymujemy przedział $[0,32; 0,38]$. Możemy więc oczekiwać z prawdopodobieństwem $0,95$, że w przedziale tym znalazł się rzeczywisty udział głosów oddanych na PiS.

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

Komentarze do przykładu

1. W tym przykładzie szacowanym wskaźnikiem był udział (lub zamiennie – odsetek) głosujących na PiS. Uzyskaliśmy 95-procentowy przedział ufności $[0,32; 0,38]$ lub zamiennie $[32\%, 38\%]$.

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

Komentarze do przykładu

1. W tym przykładzie szacowanym wskaźnikiem był udział (lub zamiennie – odsetek) głosujących na PiS. Uzyskaliśmy 95-procentowy przedział ufności $[0,32; 0,38]$ lub zamiennie $[32\%, 38\%]$.
2. Zgodnie z Uwagą 3, ten wskaźnik możemy traktować także jako średnią w populacji składającej się z jedynek (np. gdy wyborca popiera PiS) i zer (w innych przypadkach).

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

Komentarze do przykładu

1. W tym przykładzie szacowanym wskaźnikiem był udział (lub zamiennie – odsetek) głosujących na PiS. Uzyskaliśmy 95-procentowy przedział ufności $[0,32; 0,38]$ lub zamiennie $[32\%, 38\%]$.
2. Zgodnie z Uwagą 3, ten wskaźnik możemy traktować także jako średnią w populacji składającej się z jedynek (np. gdy wyborca popiera PiS) i zer (w innych przypadkach).
3. Innymi słowy, badaną cechą w populacji była tu pewna cecha zero-jedynkowa, a nasze zadanie polegało na estymacji przedziałowej wartości średniej tej cechy.

Przykład zastosowania przedziału ufności dla średniej populacji

Komentarze do przykładu

1. W tym przykładzie szacowanym wskaźnikiem był udział (lub zamiennie – odsetek) głosujących na PiS. Uzyskaliśmy 95-procentowy przedział ufności $[0,32; 0,38]$ lub zamiennie $[32\%, 38\%]$.
2. Zgodnie z Uwagą 3, ten wskaźnik możemy traktować także jako średnią w populacji składającej się z jedynek (np. gdy wyborca popiera PiS) i zer (w innych przypadkach).
3. Innymi słowy, badaną cechą w populacji była tu pewna cecha zero-jedynkowa, a nasze zadanie polegało na estymacji przedziałowej wartości średniej tej cechy.
4. Jeśli chcemy w tym zadaniu skorzystać z wyprowadzonego wzoru na przedział ufności, należy takie oszacowanie oprzeć na próbie liczącej co najmniej 100 elementów.