PODSTAWY WNIOSKOWANIA STATYSTYCZNEGO – część II

Agnieszka Rossa

Szkic wykładu

1. Wprowadzenie
2. Idea testu statystycznego i podstawowe pojęcia
3. Etapy testowania hipotez statystycznych
4. Rodzaje możliwych błędów podczas testowania hipotez
5. Idea budowy obszaru odrzucenia testu

Weryfikacja hipotez statystycznych

- Obok estymacji drugim działem wnioskowania statystycznego jest **weryfikacja hipotez statystycznych**.

Weryfikacja hipotez statystycznych

- Obok estymacji drugim działem wnioskowania statystycznego jest **weryfikacja hipotez statystycznych**.
- Weryfikacja hipotez statystycznych (lub też testowanie hipotez) obejmuje zbiór reguł uogólniania wyników z próby na populację. Jednak algorytm postępowania przebiega tutaj w odwrotnym kierunku niż stosowany w estymacji.

Weryfikacja hipotez statystycznych

- Obok estymacji drugim działem wnioskowania statystycznego jest **weryfikacja hipotez statystycznych**.
- Weryfikacja hipotez statystycznych (lub też testowanie hipotez) obejmuje zbiór reguł uogólniania wyników z próby na populację. Jednak algorytm postępowania przebiega tutaj w odwrotnym kierunku niż stosowany w estymacji.
- W przypadku weryfikacji hipotez, najpierw **formułuje się pewne przypuszczenie dotyczące konkretnej populacji**, a następnie sprawdza (odpowiednimi metodami), czy można je odrzucić, uznając za fałszywe, czy też nie.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Przykład 1.

- Jedną z pierwszych prób testowania przypuszczenia dotyczącego pewnej populacji podjął John Arbuthnot w roku 1710.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Przykład 1.

- Jedną z pierwszych prób testowania przypuszczenia dotyczącego pewnej populacji podjął John Arbuthnot w roku 1710.
- Chciał się przekonać, czy populację londyńskich noworodków charakteryzuje prawidłowość, iż rodzi się więcej chłopców niż dziewczynek (obecnie tego rodzaju prawidłowość jest powszechnie uznawana).

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Przykład 1.

- Jedną z pierwszych prób testowania przypuszczenia dotyczącego pewnej populacji podjął John Arbuthnot w roku 1710.
- Chciał się przekonać, czy populację londyńskich noworodków charakteryzuje prawidłowość, iż rodzi się więcej chłopców niż dziewczynek (obecnie tego rodzaju prawidłowość jest powszechnie uznawana).
- W tym celu przeanalizował dane dotyczące płci noworodków, które urodziły się w Londynie w ciągu ostatnich 82 lat i stwierdził, że we wszystkich przeanalizowanych latach liczba chłopców była większa niż liczba dziewczynek.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Przykład 1.

- Jedną z pierwszych prób testowania przypuszczenia dotyczącego pewnej populacji podjął John Arbuthnot w roku 1710.
- Chciał się przekonać, czy populację londyńskich noworodków charakteryzuje prawidłowość, iż rodzi się więcej chłopców niż dziewczynek (obecnie tego rodzaju prawidłowość jest powszechnie uznawana).
- W tym celu przeanalizował dane dotyczące płci noworodków, które urodziły się w Londynie w ciągu ostatnich 82 lat i stwierdził, że we wszystkich przeanalizowanych latach liczba chłopców była większa niż liczba dziewczynek.
- **Pytanie:** Czy zaobserwowane wyniki świadczą o pewnej prawidłowości, czy też są przypadkowe?

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Rozwiązanie.

- Przyjmijmy na chwilę, że prawdziwe jest następujące **przypuszczenie**, które oznaczymy symbolem H_0:

  H_0**: Prawdopodobieństwo** p **urodzenia chłopca jest takie samo, jak urodzenia dziewczynki, czyli** $p = \frac{1}{2}$**.**

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Rozwiązanie.

- Przyjmijmy na chwilę, że prawdziwe jest następujące **przypuszczenie**, które oznaczymy symbolem H_0:

  H_0**: Prawdopodobieństwo** p **urodzenia chłopca jest takie samo, jak urodzenia dziewczynki, czyli** $p = \frac{1}{2}$**.**

- Hipoteza ta implikuje jednocześnie przypuszczenie, że z takim samym prawdopodobieństwem liczba urodzonych w określonym roku chłopców jest większa lub mniejsza od liczby urodzonych dziewczynek.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Rozwiązanie.

- Przyjmijmy na chwilę, że prawdziwe jest następujące **przypuszczenie**, które oznaczymy symbolem H_0:

  H_0: Prawdopodobieństwo p urodzenia chłopca jest takie samo, jak urodzenia dziewczynki, czyli $p = \frac{1}{2}$.

- Hipoteza ta implikuje jednocześnie przypuszczenie, że z takim samym prawdopodobieństwem liczba urodzonych w określonym roku chłopców jest większa lub mniejsza od liczby urodzonych dziewczynek.
- Przy tym założeniu wydaje się bardzo mało prawdopodobne, aby przez kolejne 82 lata liczba chłopców przewyższała liczbę dziewczynek.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Rozwiązanie.

- Przyjmijmy na chwilę, że prawdziwe jest następujące **przypuszczenie**, które oznaczymy symbolem H_0:

  H_0: Prawdopodobieństwo p urodzenia chłopca jest takie samo, jak urodzenia dziewczynki, czyli $p = \frac{1}{2}$.

- Hipoteza ta implikuje jednocześnie przypuszczenie, że z takim samym prawdopodobieństwem liczba urodzonych w określonym roku chłopców jest większa lub mniejsza od liczby urodzonych dziewczynek.
- Przy tym założeniu wydaje się bardzo mało prawdopodobne, aby przez kolejne 82 lata liczba chłopców przewyższała liczbę dziewczynek.
- Obliczmy szansę tego wyniku, zakładając prawdziwość H_0.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

- Nazwijmy **sukcesem** zdarzenie, że liczba chłopców urodzonych w danym roku jest większa niż liczba dziewczynek.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

- Nazwijmy **sukcesem** zdarzenie, że liczba chłopców urodzonych w danym roku jest większa niż liczba dziewczynek.
- Jeśli prawdziwe jest przypuszczenie H_0, to **prawdopodobieństwo sukcesu** wynosi w przybliżeniu $\frac{1}{2}$.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

- Nazwijmy **sukcesem** zdarzenie, że liczba chłopców urodzonych w danym roku jest większa niż liczba dziewczynek.
- Jeśli prawdziwe jest przypuszczenie H_0, to **prawdopodobieństwo sukcesu** wynosi w przybliżeniu $\frac{1}{2}$.
- Pomijamy tu zdarzenie jednakowej liczby chłopców i dziewczynek, ponieważ w dużej populacji noworodków prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest bardzo małe.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

- Nazwijmy **sukcesem** zdarzenie, że liczba chłopców urodzonych w danym roku jest większa niż liczba dziewczynek.
- Jeśli prawdziwe jest przypuszczenie H_0, to **prawdopodobieństwo sukcesu** wynosi w przybliżeniu $\frac{1}{2}$.
- Pomijamy tu zdarzenie jednakowej liczby chłopców i dziewczynek, ponieważ w dużej populacji noworodków prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest bardzo małe.
- Niech X oznacza liczbę lat w ciągu $n = 82$ lat, w których liczba chłopców była większa od liczby dziewczynek. Zauważymy, że w ogólnym przypadku X jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

- Nazwijmy **sukcesem** zdarzenie, że liczba chłopców urodzonych w danym roku jest większa niż liczba dziewczynek.
- Jeśli prawdziwe jest przypuszczenie H_0, to **prawdopodobieństwo sukcesu** wynosi w przybliżeniu $\frac{1}{2}$.
- Pomijamy tu zdarzenie jednakowej liczby chłopców i dziewczynek, ponieważ w dużej populacji noworodków prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest bardzo małe.
- Niech X oznacza liczbę lat w ciągu $n = 82$ lat, w których liczba chłopców była większa od liczby dziewczynek. Zauważymy, że w ogólnym przypadku X jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym.
- Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia, że $X = 82$, **przy założeniu prawdziwości H_0**.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Prawdopodobieństwo zrealizowania się 82 sukcesów w serii $n = 82$ doświadczeń (w tym przypadku doświadczeniami są kolejne lata obserwacji), przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza H_0, jest równe:

$P(X=82)=\binom{82}{82}\left(\frac{1}{2}\right)^{82}=\frac{1}{2^{82}}=0,000000000000000000000000002.$

Komentarz:

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Prawdopodobieństwo zrealizowania się 82 sukcesów w serii $n = 82$ doświadczeń (w tym przypadku doświadczeniami są kolejne lata obserwacji), przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza H_0, jest równe:

$$P(X=82)=\binom{82}{82}\left(\frac{1}{2}\right)^{82}=\frac{1}{2^{82}}=0,0000000000000000000000002.$$

Komentarz:

- Gdyby prawdopodobieństwo urodzenia chłopca było większe od $\frac{1}{2}$, to także prawdopodobieństwo $P(X=82)$ byłoby większe od wartości $\frac{1}{2^{82}}$.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 1

Prawdopodobieństwo zrealizowania się 82 sukcesów w serii $n = 82$ doświadczeń (w tym przypadku doświadczeniami są kolejne lata obserwacji), przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza H_0, jest równe:

$$P(X=82)=\binom{82}{82}\left(\frac{1}{2}\right)^{82}=\frac{1}{2^{82}}=0,0000000000000000000000002.$$

Komentarz:

- Gdyby prawdopodobieństwo urodzenia chłopca było większe od $\frac{1}{2}$, to także prawdopodobieństwo $P(X=82)$ byłoby większe od wartości $\frac{1}{2^{82}}$.
- Spostrzeżenie to pozwala sądzić, że H_0 nie jest prawdziwa, co z kolei skłania do decyzji o jej odrzuceniu na rzecz hipotezy, że $p > \frac{1}{2}$.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Uwagi do przykładu 1

- Przedstawione rozumowanie doprowadziło nas do decyzji o odrzuceniu hipotezy H_0 postaci:

$$H_0:\ p = \frac{1}{2}$$

na rzecz innego przypuszczenia (oznaczmy go przez H_1):

$$H_1:\ p > \frac{1}{2}.$$

Weryfikacja hipotez statystycznych – Uwagi do przykładu 1

- Przedstawione rozumowanie doprowadziło nas do decyzji o odrzuceniu hipotezy H_0 postaci:

$$H_0 : \; p = \frac{1}{2}$$

na rzecz innego przypuszczenia (oznaczmy go przez H_1):

$$H_1 : \; p > \frac{1}{2}.$$

- John Arbuthnot przeprowadził podobne rozumowanie, choć oczywiście nie odwoływał się do wykorzystanych tu współczesnych pojęć statystyki matematycznej. Opis jego wywodów znaleźć można w książce: Gigerenzer G., Murray D. J. (1987), *Cognition as intuitive statistics*, Hillsdale: Erlbaum.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

Załóżmy, że chcemy opracować bardziej ogólną procedurę testową sprawdzającą hipotezę $H_0 : p = p_0$ przeciwko hipotezie $H_1 : p > p_0$, którą można byłoby stosować w przypadku innych zagadnień.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

Załóżmy, że chcemy opracować bardziej ogólną procedurę testową sprawdzającą hipotezę $H_0 : p = p_0$ przeciwko hipotezie $H_1 : p > p_0$, którą można byłoby stosować w przypadku innych zagadnień.

- Przyjmijmy, że dla ustalonej próby n niezależnych doświadczeń, z których każde kończy się sukcesem lub porażką, będziemy rejestrować **liczbę sukcesów**.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

Załóżmy, że chcemy opracować bardziej ogólną procedurę testową sprawdzającą hipotezę $H_0 : p = p_0$ przeciwko hipotezie $H_1 : p > p_0$, którą można byłoby stosować w przypadku innych zagadnień.

- Przyjmijmy, że dla ustalonej próby n niezależnych doświadczeń, z których każde kończy się sukcesem lub porażką, będziemy rejestrować **liczbę sukcesów**.
- Prawdopodobieństwo sukcesu p jest nieznane, ale przypuszczamy, że jest równe zadanej wartości p_0. Będzie to nasza hipoteza H_0. Ponadto, niech inna hipoteza H_1 (tj. hipoteza konkurencyjna do H_0) zakłada, że $p > p_0$.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

Załóżmy, że chcemy opracować bardziej ogólną procedurę testową sprawdzającą hipotezę $H_0 : p = p_0$ przeciwko hipotezie $H_1 : p > p_0$, którą można byłoby stosować w przypadku innych zagadnień.

- Przyjmijmy, że dla ustalonej próby n niezależnych doświadczeń, z których każde kończy się sukcesem lub porażką, będziemy rejestrować **liczbę sukcesów**.
- Prawdopodobieństwo sukcesu p jest nieznane, ale przypuszczamy, że jest równe zadanej wartości p_0. Będzie to nasza hipoteza H_0. Ponadto, niech inna hipoteza H_1 (tj. hipoteza konkurencyjna do H_0) zakłada, że $p > p_0$.
- W ogólnym przypadku liczba sukcesów w serii n niezależnych doświadczeń jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym. Oznaczmy tę zmienną symbolem X.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- **Pytanie:** Jaka powinna być minimalna liczba sukcesów, przy której będziemy skłonni odrzucić hipotezę $H_0 : p = p_0$ na rzecz hipotezy $H_1 : p > p_0$, aby ryzyko, że taka decyzja jest błędna, nie było zbyt duże?

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- **Pytanie:** Jaka powinna być minimalna liczba sukcesów, przy której będziemy skłonni odrzucić hipotezę $H_0: p = p_0$ na rzecz hipotezy $H_1: p > p_0$, aby ryzyko, że taka decyzja jest błędna, nie było zbyt duże?
- Wydaje się, że progiem powinna być taka liczba x, dla której prawdopodobieństwo zrealizowania się liczby sukcesów równej co najmniej x (wyznaczone przy założeniu prawdziwości H_0) jest dostatecznie małe i mniejsze niż analogiczne prawdopodobieństwo, uzyskane w przypadku, gdyby założyć prawdziwość hipotezy H_1.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- **Pytanie:** Jaka powinna być minimalna liczba sukcesów, przy której będziemy skłonni odrzucić hipotezę $H_0: \ p = p_0$ na rzecz hipotezy $H_1: \ p > p_0$, aby ryzyko, że taka decyzja jest błędna, nie było zbyt duże?
- Wydaje się, że progiem powinna być taka liczba x, dla której prawdopodobieństwo zrealizowania się liczby sukcesów równej co najmniej x (wyznaczone przy założeniu prawdziwości H_0) jest dostatecznie małe i mniejsze niż analogiczne prawdopodobieństwo, uzyskane w przypadku, gdyby założyć prawdziwość hipotezy H_1.
- Rozważane prawdopodobieństwo można zapisać jako $P(X \geq x)$. Jest ono równe następującej sumie: $P(X \geq x) = P(X{=}n) + P(X{=}n{-}1) + \ldots + P(X{=}x)$.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- **Pytanie:** Jaka powinna być minimalna liczba sukcesów, przy której będziemy skłonni odrzucić hipotezę $H_0 : p = p_0$ na rzecz hipotezy $H_1 : p > p_0$, aby ryzyko, że taka decyzja jest błędna, nie było zbyt duże?
- Wydaje się, że progiem powinna być taka liczba x, dla której prawdopodobieństwo zrealizowania się liczby sukcesów równej co najmniej x (wyznaczone przy założeniu prawdziwości H_0) jest dostatecznie małe i mniejsze niż analogiczne prawdopodobieństwo, uzyskane w przypadku, gdyby założyć prawdziwość hipotezy H_1.
- Rozważane prawdopodobieństwo można zapisać jako $P(X \geq x)$. Jest ono równe następującej sumie: $P(X \geq x) = P(X{=}n) + P(X{=}n{-}1) + \ldots + P(X{=}x)$.
- Znajdziemy składniki tej sumy, gdy $n = 20$ i $p_0 = \frac{1}{2}$.

x	$P(X = x)$	$P(X \geq x)$
20	0,0000	0,0000
19	0,0000	0,0000
18	0,0002	0,0002
17	0,0011	0,0013
16	0,0046	0,0059
15	0,0148	0,0207
14	0,0370	0,0577
13	0,0739	0,1316
12	0,1201	0,2517
11	0,1602	0,4119
10	0,1762	0,5881
9	0,1602	0,7483
8	0,1201	0,8684
7	0,0739	0,9423
6	0,0370	0,9793
5	0,0148	0,9941
4	0,0046	0,9987
3	0,0011	0,9998
2	0,0002	1,0000
1	0,0000	1,0000
0	0,0000	1,0000

Kolorem czerwonym zaznaczono najmniejszą liczbę sukcesów x, dla której prawdopodobieństwo $P(X \geq x)$ nie przekracza zadanego, dopuszczalnego poziomu. Tutaj przyjęto, że poziomem tym jest liczba $0,06$.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- Otrzymaliśmy, iż $x = 14$ jest minimalną liczbą sukcesów, dla której prawdopodobieństwo $P(X \geq x)$, wyznaczone przy założeniu prawdziwości $H_0 : p = \frac{1}{2}$, jest mniejsze od $0,06$.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- Otrzymaliśmy, iż $x = 14$ jest minimalną liczbą sukcesów, dla której prawdopodobieństwo $P(X \geq x)$, wyznaczone przy założeniu prawdziwości $H_0 : p = \frac{1}{2}$, jest mniejsze od $0,06$.
- Oznacza to, że jest mało prawdopodobne, aby przy założeniu prawdziwości H_0 zaobserwować 14 lub więcej sukcesów w serii $n = 20$ niezależnych doświadczeń.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- Otrzymaliśmy, iż $x = 14$ jest minimalną liczbą sukcesów, dla której prawdopodobieństwo $P(X \geq x)$, wyznaczone przy założeniu prawdziwości $H_0 : p = \frac{1}{2}$, jest mniejsze od $0,06$.
- Oznacza to, że jest mało prawdopodobne, aby przy założeniu prawdziwości H_0 zaobserwować 14 lub więcej sukcesów w serii $n = 20$ niezależnych doświadczeń.
- Jednocześnie taka liczba sukcesów jest bardziej prawdopodobna, gdyby założyć prawdziwość hipotezy $H_1 : p > \frac{1}{2}$.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- Otrzymaliśmy, iż $x = 14$ jest minimalną liczbą sukcesów, dla której prawdopodobieństwo $P(X \geq x)$, wyznaczone przy założeniu prawdziwości $H_0 : p = \frac{1}{2}$, jest mniejsze od $0,06$.
- Oznacza to, że jest mało prawdopodobne, aby przy założeniu prawdziwości H_0 zaobserwować 14 lub więcej sukcesów w serii $n = 20$ niezależnych doświadczeń.
- Jednocześnie taka liczba sukcesów jest bardziej prawdopodobna, gdyby założyć prawdziwość hipotezy $H_1 : p > \frac{1}{2}$.
- Gdy więc odnotujemy 14 lub więcej sukcesów, to podejmiemy decyzję o odrzuceniu H_0 na rzecz H_1.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Przykład 2

- Otrzymaliśmy, iż $x = 14$ jest minimalną liczbą sukcesów, dla której prawdopodobieństwo $P(X \geq x)$, wyznaczone przy założeniu prawdziwości $H_0 : p = \frac{1}{2}$, jest mniejsze od $0,06$.
- Oznacza to, że jest mało prawdopodobne, aby przy założeniu prawdziwości H_0 zaobserwować 14 lub więcej sukcesów w serii $n = 20$ niezależnych doświadczeń.
- Jednocześnie taka liczba sukcesów jest bardziej prawdopodobna, gdyby założyć prawdziwość hipotezy $H_1 : p > \frac{1}{2}$.
- Gdy więc odnotujemy 14 lub więcej sukcesów, to podejmiemy decyzję o odrzuceniu H_0 na rzecz H_1.
- Zbiór liczb $\{14, 15, 16, \ldots, 20\}$ tworzy w tym problemie tzw. **obszar odrzucenia** (lub zamiennie – obszar krytyczny), a liczba $0,06$ jest tu przyjętym **poziomem istotności**.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Idea testu istotności

Weryfikacja hipotez statystycznych – Idea testu istotności

- Przykład ten ilustruje ideę tzw. **statystycznego testu istotności**, który można opisać jako:

Weryfikacja hipotez statystycznych – Idea testu istotności

- Przykład ten ilustruję ideę tzw. **statystycznego testu istotności**, który można opisać jako:

  procedurę pozwalającą określić w zbiorze możliwych wyników z próby dwa podzbiory: obszar odrzucenia oraz jego dopełnienie (obszar nieodrzucenia).

Weryfikacja hipotez statystycznych – Idea testu istotności

- Przykład ten ilustruję ideę tzw. **statystycznego testu istotności**, który można opisać jako:

  procedurę pozwalającą określić w zbiorze możliwych wyników z próby dwa podzbiory: obszar odrzucenia oraz jego dopełnienie (obszar nieodrzucenia).

  Podzbiory te wyznaczamy przy założeniu, że prawdziwe jest pewne przypuszczenie H_0 dotyczące populacji.

Weryfikacja hipotez statystycznych – Idea testu istotności

- Przykład ten ilustruję ideę tzw. **statystycznego testu istotności**, który można opisać jako:

  procedurę pozwalającą określić w zbiorze możliwych wyników z próby dwa podzbiory: obszar odrzucenia oraz jego dopełnienie (obszar nieodrzucenia).

  Podzbiory te wyznaczamy przy założeniu, że prawdziwe jest pewne przypuszczenie H_0 dotyczące populacji.

  Jeśli wynik z konkretnej próby znajdzie się w obszarze odrzucenia, wówczas odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej H_1. W przeciwnym przypadku stwierdzamy, że nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Weryfikacja hipotez statystycznych
Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Weryfikacja hipotez statystycznych
Podstawowe pojęcia i oznaczenia

- Poziom istotności testu statystycznego oznaczamy zwykle symbolem α.

Weryfikacja hipotez statystycznych
Podstawowe pojęcia i oznaczenia

- Poziom istotności testu statystycznego oznaczamy zwykle symbolem α.
- Dopuszczalny poziom istotności α **ustalamy z góry**. Powinien być liczbą małą, rzędu np. 0,1 lub 0,05, niekiedy przyjmuje się wartość 0,01.

Weryfikacja hipotez statystycznych
Podstawowe pojęcia i oznaczenia

- Poziom istotności testu statystycznego oznaczamy zwykle symbolem α.
- Dopuszczalny poziom istotności α **ustalamy z góry**. Powinien być liczbą małą, rzędu np. 0,1 lub 0,05, niekiedy przyjmuje się wartość 0,01.
- Hipotezy H_0, H_1 nazywamy odpowiednio **hipotezą zerową** i **hipotezą alternatywną**.

Etapy testowania hipotez statystycznych

1. Formułujemy parę wykluczających się **hipotez** H_0, H_1 dotyczących interesującej nas populacji.

Etapy testowania hipotez statystycznych

1. Formułujemy parę wykluczających się **hipotez** H_0, H_1 dotyczących interesującej nas populacji.
2. Ustalamy dopuszczalny **poziom istotności** α.

Etapy testowania hipotez statystycznych

1. Formułujemy parę wykluczających się **hipotez** H_0, H_1 dotyczących interesującej nas populacji.
2. Ustalamy dopuszczalny **poziom istotności** α.
3. Projektujemy i przeprowadzamy eksperyment (np. losujemy próbę) i obliczamy **wynik z próby**.

Etapy testowania hipotez statystycznych

1. Formułujemy parę wykluczających się **hipotez** H_0, H_1 dotyczących interesującej nas populacji.
2. Ustalamy dopuszczalny **poziom istotności** α.
3. Projektujemy i przeprowadzamy eksperyment (np. losujemy próbę) i obliczamy **wynik z próby**.
4. Wyznaczamy **obszar odrzucenia** testu, przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza zerowa H_0.

Etapy testowania hipotez statystycznych

1. Formułujemy parę wykluczających się **hipotez** H_0, H_1 dotyczących interesującej nas populacji.
2. Ustalamy dopuszczalny **poziom istotności** α.
3. Projektujemy i przeprowadzamy eksperyment (np. losujemy próbę) i obliczamy **wynik z próby**.
4. Wyznaczamy **obszar odrzucenia** testu, przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza zerowa H_0.
5. Jeśli wynik z próby znajduje się w obszarze odrzucenia, wówczas **odrzucamy** hipotezę H_0 na rzecz H_1. W przeciwnym przypadku stwierdzamy, że **nie ma podstaw do odrzucenia** H_0.

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju

- Z przedstawionych etapów testowania hipotez wynika, że decyzję o odrzuceniu hipotezy zerowej H_0 podejmujemy wtedy, gdy wynik z próby znajduje się w obszarze odrzucenia (wyznaczonym przy zadanym poziomie istotności α).

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju

- Z przedstawionych etapów testowania hipotez wynika, że decyzję o odrzuceniu hipotezy zerowej H_0 podejmujemy wtedy, gdy wynik z próby znajduje się w obszarze odrzucenia (wyznaczonym przy zadanym poziomie istotności α).
- Zauważymy, że taką decyzję podejmujemy na podstawie analizy danych z próby losowej, mając nadzieję, że jest ona prawidłowa w odniesieniu do całej populacji.

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju

- Z przedstawionych etapów testowania hipotez wynika, że decyzję o odrzuceniu hipotezy zerowej H_0 podejmujemy wtedy, gdy wynik z próby znajduje się w obszarze odrzucenia (wyznaczonym przy zadanym poziomie istotności α).
- Zauważymy, że taką decyzję podejmujemy na podstawie analizy danych z próby losowej, mając nadzieję, że jest ona prawidłowa w odniesieniu do całej populacji.
- Tego jednak nie możemy stwierdzić z całą pewnością, ponieważ nie wiemy na ogół nic o prawdziwości lub nieprawdziwości postawionej hipotezy H_0 (dotyczy ona bowiem całej populacji, a nie posiadanej próby).

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju

- Z przedstawionych etapów testowania hipotez wynika, że decyzję o odrzuceniu hipotezy zerowej H_0 podejmujemy wtedy, gdy wynik z próby znajduje się w obszarze odrzucenia (wyznaczonym przy zadanym poziomie istotności α).
- Zauważymy, że taką decyzję podejmujemy na podstawie analizy danych z próby losowej, mając nadzieję, że jest ona prawidłowa w odniesieniu do całej populacji.
- Tego jednak nie możemy stwierdzić z całą pewnością, ponieważ nie wiemy na ogół nic o prawdziwości lub nieprawdziwości postawionej hipotezy H_0 (dotyczy ona bowiem całej populacji, a nie posiadanej próby).
- Dobrze byłoby jednak znać ryzyko ewentualnego błędu, tj. odrzucenia hipotezy H_0 w przypadku, gdy była prawdziwa.

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju c.d.

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju c.d.

- Wróćmy zatem do **pytania:** w jakich okolicznościach odrzucamy H_0?

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju c.d.

- Wróćmy zatem do **pytania:** w jakich okolicznościach odrzucamy H_0?
- Zgodnie z opisaną procedurą testowania, hipotezę H_0 odrzucamy, gdy wynik z próby jest w obszarze odrzucenia wyznaczonym dla zadanego α, przy czym α jest z założenia małą liczbą dodatnią (rzędu 0,1 lub mniej).

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju c.d.

- Wróćmy zatem do **pytania:** w jakich okolicznościach odrzucamy H_0?
- Zgodnie z opisaną procedurą testowania, hipotezę H_0 odrzucamy, gdy wynik z próby jest w obszarze odrzucenia wyznaczonym dla zadanego α, przy czym α jest z założenia małą liczbą dodatnią (rzędu 0,1 lub mniej).
- Ilekroć test pozwala odrzucić hipotezę zerową H_0, wiemy, że prawdopodobieństwo błędu polegającego na odrzuceniu hipotezy prawdziwej nie przekracza małej wartości α. Innymi słowy, ryzyko błędu jest w takich przypadkach niewielkie.

Błędy testowania hipotez – błąd pierwszego rodzaju c.d.

- Wróćmy zatem do **pytania:** w jakich okolicznościach odrzucamy H_0?
- Zgodnie z opisaną procedurą testowania, hipotezę H_0 odrzucamy, gdy wynik z próby jest w obszarze odrzucenia wyznaczonym dla zadanego α, przy czym α jest z założenia małą liczbą dodatnią (rzędu 0,1 lub mniej).
- Ilekroć test pozwala odrzucić hipotezę zerową H_0, wiemy, że prawdopodobieństwo błędu polegającego na odrzuceniu hipotezy prawdziwej nie przekracza małej wartości α. Innymi słowy, ryzyko błędu jest w takich przypadkach niewielkie.
- Błąd polegający na odrzuceniu hipotezy prawdziwej nazywamy **błędem I rodzaju**.

Błędy testowania hipotez – błąd drugiego rodzaju

- Rozważmy teraz kolejne **pytanie:** jaką decyzję możemy podjąć, gdy wynik z próby nie znajdzie się w obszarze odrzucenia?

Błędy testowania hipotez – błąd drugiego rodzaju

- Rozważmy teraz kolejne **pytanie:** jaką decyzję możemy podjąć, gdy wynik z próby nie znajdzie się w obszarze odrzucenia?
- Nasuwa się pozornie oczywista odpowiedź, że decyzją powinno być przyjęcie hipotezy H_0.

Błędy testowania hipotez – błąd drugiego rodzaju

- Rozważmy teraz kolejne **pytanie:** jaką decyzję możemy podjąć, gdy wynik z próby nie znajdzie się w obszarze odrzucenia?
- Nasuwa się pozornie oczywista odpowiedź, że decyzją powinno być przyjęcie hipotezy H_0.
- Trzeba jednak pamiętać, że w przypadku takiej decyzji możemy narazić się na inny błąd, zwany **błędem II rodzaju**, polegający na przyjęciu hipotezy H_0, która w rzeczywistości mogła być fałszywa.

Błędy testowania hipotez – błąd drugiego rodzaju

- Rozważmy teraz kolejne **pytanie:** jaką decyzję możemy podjąć, gdy wynik z próby nie znajdzie się w obszarze odrzucenia?
- Nasuwa się pozornie oczywista odpowiedź, że decyzją powinno być przyjęcie hipotezy H_0.
- Trzeba jednak pamiętać, że w przypadku takiej decyzji możemy narazić się na inny błąd, zwany **błędem II rodzaju**, polegający na przyjęciu hipotezy H_0, która w rzeczywistości mogła być fałszywa.
- Ponieważ na ogół nie znamy prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju, więc w takich sytuacjach ostrożniejszym wyjściem jest stwierdzenie, że **nie ma podstaw do odrzucenia H_0** (stwierdzenie takie nie rozstrzyga, czy hipotezę H_0 można uznać za prawdziwą lub fałszywą).

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 3

- Wróćmy do przykładu 2, w którym rozważaliśmy zagadnienie testowania hipotezy $H_0 : p = p_0$ wobec $H_1 : p > p_0$.

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 3

- Wróćmy do przykładu 2, w którym rozważaliśmy zagadnienie testowania hipotezy $H_0 : p = p_0$ wobec $H_1 : p > p_0$.
- W szczególności, wyznaczyliśmy obszar odrzucenia dla testowania hipotezy $H_0 : p = \frac{1}{2}$ przeciwko $H_1 : p > \frac{1}{2}$, opierając się danych z próby o liczności $n = 20$. Obszar odrzucenia tworzył wówczas zbiór: $\{14, 15, \ldots, 20\}$.

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 3

- Wróćmy do przykładu 2, w którym rozważaliśmy zagadnienie testowania hipotezy $H_0 : p = p_0$ wobec $H_1 : p > p_0$.
- W szczególności, wyznaczyliśmy obszar odrzucenia dla testowania hipotezy $H_0 : p = \frac{1}{2}$ przeciwko $H_1 : p > \frac{1}{2}$, opierając się danych z próby o liczności $n = 20$. Obszar odrzucenia tworzył wówczas zbiór: $\{14, 15, \ldots, 20\}$.
- Czy obszar odrzucenia byłby taki sam, gdybyśmy pozostawili niezmienioną hipotezę zerową H_0, ale zmienili hipotezę alternatywną na $H_1' : p < \frac{1}{2}$?

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 3

- Wróćmy do przykładu 2, w którym rozważaliśmy zagadnienie testowania hipotezy $H_0 : p = p_0$ wobec $H_1 : p > p_0$.
- W szczególności, wyznaczyliśmy obszar odrzucenia dla testowania hipotezy $H_0 : p = \frac{1}{2}$ przeciwko $H_1 : p > \frac{1}{2}$, opierając się danych z próby o liczności $n = 20$. Obszar odrzucenia tworzył wówczas zbiór: $\{14, 15, \ldots, 20\}$.
- Czy obszar odrzucenia byłby taki sam, gdybyśmy pozostawili niezmienioną hipotezę zerową H_0, ale zmienili hipotezę alternatywną na $H_1' : p < \frac{1}{2}$?
- W jakich okolicznościach bylibyśmy skłonni teraz odrzucić H_0 na rzecz H_1'?

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 3

- Wróćmy do przykładu 2, w którym rozważaliśmy zagadnienie testowania hipotezy $H_0 : p = p_0$ wobec $H_1 : p > p_0$.
- W szczególności, wyznaczyliśmy obszar odrzucenia dla testowania hipotezy $H_0 : p = \frac{1}{2}$ przeciwko $H_1 : p > \frac{1}{2}$, opierając się danych z próby o liczności $n = 20$. Obszar odrzucenia tworzył wówczas zbiór: $\{14, 15, \ldots, 20\}$.
- Czy obszar odrzucenia byłby taki sam, gdybyśmy pozostawili niezmienioną hipotezę zerową H_0, ale zmienili hipotezę alternatywną na $H_1' : p < \frac{1}{2}$?
- W jakich okolicznościach bylibyśmy skłonni teraz odrzucić H_0 na rzecz H_1'?
- Wydaje się, że H_0 należałoby odrzucić, gdyby liczba sukcesów była nie większa niż pewna wartość x.

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 3

- Łatwo sprawdzić, odwołując się do zamieszczonej w przykładzie 2 tablicy, że największą liczbą sukcesów x, dla której prawdopodobieństwo $P(X \leq x)$ nie przekracza założonego poziomu istotności $\alpha = 0,06$ jest liczba $x = 6$, więc obszarem odrzucenia w tej wersji naszego testu byłby zbiór $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$.

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 3

- Łatwo sprawdzić, odwołując się do zamieszczonej w przykładzie 2 tablicy, że największą liczbą sukcesów x, dla której prawdopodobieństwo $P(X \leq x)$ nie przekracza założonego poziomu istotności $\alpha = 0,06$ jest liczba $x = 6$, więc obszarem odrzucenia w tej wersji naszego testu byłby zbiór $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$.
- Oznacza to, że jest mało prawdopodobne, aby przy założeniu prawdziwości H_0 zrealizowała się liczba sukcesów nie większa niż 6. Natomiast zdarzenie takie byłoby bardziej prawdopodobne przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza H_1'.

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 3

- Łatwo sprawdzić, odwołując się do zamieszczonej w przykładzie 2 tablicy, że największą liczbą sukcesów x, dla której prawdopodobieństwo $P(X \leq x)$ nie przekracza założonego poziomu istotności $\alpha = 0,06$ jest liczba $x = 6$, więc obszarem odrzucenia w tej wersji naszego testu byłby zbiór $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$.
- Oznacza to, że jest mało prawdopodobne, aby przy założeniu prawdziwości H_0 zrealizowała się liczba sukcesów nie większa niż 6. Natomiast zdarzenie takie byłoby bardziej prawdopodobne przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza H_1'.
- **Wniosek:** Jeśli więc w serii $n = 20$ doświadczeń odnotujemy liczbę sukcesów ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$, wtedy odrzucimy hipotezę $H_0 : p = \frac{1}{2}$ na rzecz $H_1' : p < \frac{1}{2}$.

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 4

- Rozważmy teraz **pytanie**: jak określić obszar odrzucenia w konstruowanym przez nas teście, gdyby hipoteza alternatywna była postaci: $H_1'' : p \neq \frac{1}{2}$ (przy tej samej hipotezie zerowej $H_0 : \; p = \frac{1}{2}$).

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 4

- Rozważmy teraz **pytanie**: jak określić obszar odrzucenia w konstruowanym przez nas teście, gdyby hipoteza alternatywna była postaci: $H_1'' : p \neq \frac{1}{2}$ (przy tej samej hipotezie zerowej $H_0 : \; p = \frac{1}{2}$).
- Zauważymy, że w tym przypadku obszar odrzucenia powinien uwzględniać zarówno małe, jak i duże liczby sukcesów, bowiem takie wyniki będą przemawiały przeciwko hipotezie zerowej H_0, na korzyść hipotezy H_1''.

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 4

- Rozważmy teraz **pytanie**: jak określić obszar odrzucenia w konstruowanym przez nas teście, gdyby hipoteza alternatywna była postaci: $H_1'' : p \neq \frac{1}{2}$ (przy tej samej hipotezie zerowej $H_0 : \ p = \frac{1}{2}$).
- Zauważymy, że w tym przypadku obszar odrzucenia powinien uwzględniać zarówno małe, jak i duże liczby sukcesów, bowiem takie wyniki będą przemawiały przeciwko hipotezie zerowej H_0, na korzyść hipotezy H_1''.
- Poszukujemy więc takich liczb x_1 i x_2, dla których $P(X \leq x_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ oraz $P(X \geq x_2) \leq \frac{\alpha}{2}$, a tym samym $P(X \leq x_1) + P(X \geq x_2) \leq \alpha$, dla ustalonego α i przy założeniu prawdziwości H_0. Np. $x_1{=}5, x_2{=}15$, gdy $\alpha{=}0,06$.

Budowa obszaru odrzucenia – Przykład 4

- Rozważmy teraz **pytanie**: jak określić obszar odrzucenia w konstruowanym przez nas teście, gdyby hipoteza alternatywna była postaci: $H_1'' : p \neq \frac{1}{2}$ (przy tej samej hipotezie zerowej $H_0 : \ p = \frac{1}{2}$).
- Zauważymy, że w tym przypadku obszar odrzucenia powinien uwzględniać zarówno małe, jak i duże liczby sukcesów, bowiem takie wyniki będą przemawiały przeciwko hipotezie zerowej H_0, na korzyść hipotezy H_1''.
- Poszukujemy więc takich liczb x_1 i x_2, dla których $P(X \leq x_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ oraz $P(X \geq x_2) \leq \frac{\alpha}{2}$, a tym samym $P(X \leq x_1) + P(X \geq x_2) \leq \alpha$, dla ustalonego α i przy założeniu prawdziwości H_0. Np. $x_1 = 5, x_2 = 15$, gdy $\alpha = 0,06$.
- Obszar odrzucenia dla $\alpha = 0,06$ i $n = 20$ jest tu więc sumą zbiorów: $\{0, 1, \ldots, 5\}$ oraz $\{15, 16, \ldots, 20\}$.

Uwagi:

1. Wyznaczone w przykładach 2–4 obszary odrzucenia zostały obliczone dla $p_0 = \frac{1}{2}, n = 20, \alpha = 0,06$. Obszary te zmienią się, gdy przyjmiemy inne wartości dla p_0, n lub α.

Uwagi:

1. Wyznaczone w przykładach 2–4 obszary odrzucenia zostały obliczone dla $p_0 = \frac{1}{2}, n = 20, \alpha = 0,06$. Obszary te zmienią się, gdy przyjmiemy inne wartości dla p_0, n lub α.
2. Dla dowolnego testu weryfikującego wartość parametru populacji zakłada się, że w hipotezie zerowej H_0 określona jest tylko jedna wartość tego parametru (np. $p = \frac{1}{2}$).

Uwagi:

1. Wyznaczone w przykładach 2–4 obszary odrzucenia zostały obliczone dla $p_0 = \frac{1}{2}, n = 20, \alpha = 0,06$. Obszary te zmienią się, gdy przyjmiemy inne wartości dla p_0, n lub α.
2. Dla dowolnego testu weryfikującego wartość parametru populacji zakłada się, że w hipotezie zerowej H_0 określona jest tylko jedna wartość tego parametru (np. $p = \frac{1}{2}$).
3. Hipoteza alternatywna jest hipotezą konkurencyjną do H_0 i może dopuszczać wiele możliwych wartości parametru (np. zapis $H_1 : \; p > \frac{1}{2}$ oznacza, że dopuszczamy każdą wartość prawdopodobieństwa p, większą od $\frac{1}{2}$).

Uwagi:

1. Wyznaczone w przykładach 2–4 obszary odrzucenia zostały obliczone dla $p_0 = \frac{1}{2}, n = 20, \alpha = 0,06$. Obszary te zmienią się, gdy przyjmiemy inne wartości dla p_0, n lub α.
2. Dla dowolnego testu weryfikującego wartość parametru populacji zakłada się, że w hipotezie zerowej H_0 określona jest tylko jedna wartość tego parametru (np. $p = \frac{1}{2}$).
3. Hipoteza alternatywna jest hipotezą konkurencyjną do H_0 i może dopuszczać wiele możliwych wartości parametru (np. zapis $H_1: \ p > \frac{1}{2}$ oznacza, że dopuszczamy każdą wartość prawdopodobieństwa p, większą od $\frac{1}{2}$).
4. Postać hipotezy alternatywnej dobieramy w zależności od problemu oraz od naszej wiedzy o badanym zagadnieniu.

Uwagi:

1. Wyznaczone w przykładach 2–4 obszary odrzucenia zostały obliczone dla $p_0 = \frac{1}{2}, n = 20, \alpha = 0,06$. Obszary te zmienią się, gdy przyjmiemy inne wartości dla p_0, n lub α.
2. Dla dowolnego testu weryfikującego wartość parametru populacji zakłada się, że w hipotezie zerowej H_0 określona jest tylko jedna wartość tego parametru (np. $p = \frac{1}{2}$).
3. Hipoteza alternatywna jest hipotezą konkurencyjną do H_0 i może dopuszczać wiele możliwych wartości parametru (np. zapis $H_1: \ p > \frac{1}{2}$ oznacza, że dopuszczamy każdą wartość prawdopodobieństwa p, większą od $\frac{1}{2}$).
4. Postać hipotezy alternatywnej dobieramy w zależności od problemu oraz od naszej wiedzy o badanym zagadnieniu.
5. Test istotności weryfikuje bezpośrednio tylko hipotezę H_0, ale obszar odrzucenia testu jest zależny od hipotezy H_1.