ANALIZA SZEREGÓW CZASOWYCH
Część I

Szeregiem czasowym nazywamy ciąg $\{y_t\}$ wyników obserwacji uporządkowanych w czasie, przy czym symbol t numery kolejnych jednostek czasu, natomiast y_t oznacza wielkość badanego zjawiska w okresie (lub momencie) t.

Szereg czasowy o skończonej liczbie wyrazów przedstawiamy z reguły w postaci tabelarycznej:

Okresy lub momenty czasu t	1	2	...	n
y_t	y_1	y_2	...	y_n

Szereg czasowy momentów, to szereg zawierający informacje o poziomach badanego zjawiska w określonych momentach pewnego przedziału czasowego. Z kolei **szereg czasowy okresów** zawiera informacje o rozmairach zjawiska w ciągu kolejnych okresów danego przedziału czasowego.

Przykład 1. Szereg czasowy momentów:

data kalendarzowa	31 XII 2000	31 XII 2001	31 XII 2002	31 XII 2003	31 XII 2004	31 XII 2005	31 XII 2006
stan ludności Polski w tys.	$38254,0$	$38242,2$	$38218,5$	$38190,6$	$38173,8$	$38157,1$	$38125,5$

Źródło: Roczniki Demograficzne.

Przykład 2. Szereg czasowy okresów:

lata	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
urodzenia żywe w Polsce w tys.	$378,3$	$368,2$	$353,8$	$351,1$	$356,1$	$364,4$	$374,2$

Źródło: Roczniki Demograficzne.

Analiza szeregów czasowych sprowadza się do następujących trzech zagadnień:

1. analiza opisowa szeregu czasowego (tj. obliczanie średniej arytmetycznej lub chronologicznej, wariancji, odchylenia standardowego),
2. porównanie poziomów zjawiska w czasie (tj. analiza dynamiki zjawisk z wykorzystaniem miar dynamiki),
3. dekompozycja szeregu czasowego (tj. wyodrębnianie tendencji rozwojowej, wahań okresowych i wahań przypadkowych).

Ad1. Do podstawowych **miar opisu szeregów czasowych** zaliczamy:

- średnią arytmetyczną (miarę tendencji centralnej dla szeregów czasowych okresów)

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

- średnią chronologiczną (miarę tendencji centralnej dla szeregów czasowych momentów)

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1+y_2}{2} + \frac{y_2+y_3}{2} \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}}{n} = \\ = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \ldots + \frac{1}{2}y_n}{n},$$

- wariancję i odchylenie standardowe

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}.$$

Ad2. Analizę **dynamiki zjawisk** przeprowadzamy z wykorzystaniem miar dynamiki, do których zaliczamy:

- przyrosty (absolutne i względne),
- indeksy dynamiki (indywidualne i zespołowe).

PRZYROSTY

Podstawowym sposobem porównywania zmian zjawiska w czasie jest analiza przyrostów absolutnych i względnych.

Przyrost absolutny Δy_t obliczamy jako różnice pomiędzy poziomem zjawiska zaobserwowanym w czasie t a poziomem zjawiska zaobserwowanego w czasie t^*, przyjętym za podstawę, czyli

$$\Delta y_t = y_t - y_{t^*}, \quad t = 1, 2, \ldots, n.$$

Przyrosty absolutne informują, o ile wzrósł lub zmalał poziom badanego zjawiska zaobserwowany w okresie (lub momencie) t w porównaniu z jego poziomem w okresie (momencie) bazowym.

Przyrost względny obliczamy jako iloraz przyrostu absolutnego Δy_t do poziomu zjawiska zaobserwowanego w czasie bazowym. Iloraz ten mam postać:

$$\frac{y_t - y_{t^*}}{y_{t^*}}, \quad t = 1, 2, \ldots, n.$$

Jeśli przyrost względny pomnożymy przez 100%, wówczas otrzymamy procentowy przyrost względny, który informuje, o ile procent jest wyższy lub niższy poziom zjawiska zaobserwowany w okresie (momnecie) t w porównaniu do jego poziomu w okresie (momencie) bazowym t^*. Przyrost względny określamy również mianem wskaźnika tempa przyrostu (lub spadku).

Przyrosty absolutne lub względne dla konkretnego szeregu czasowego, zestawione w ciąg, dają tzw. szereg czasowy przyrostów.

Przykład 3.

Na podstawie danych z przykładu 2 obliczymy przyrosty absolutne i względne liczby urodzeń w Polse w latach 2000-2006, przyjmując za podstawę porównań kolejno rok 2000 i rok 2003:

okresy czasu (lata)	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
przyrosty absolutne w tys. (rok bazowy - 2000)	0	$-10,1$	$-24,5$	$-27,2$	$-22,2$	$-13,9$	$-4,1$
przyrosty względne w % (rok bazowy - 2000)	0	$-2,7$	$-6,5$	$-7,2$	$-5,9$	$-3,7$	$-1,1$
przyrosty absolutne w tys. (rok bazowy - 2003)	$27,2$	$17,1$	$2,7$	0	5	$13,3$	$23,1$
przyrosty względne w % (rok bazowy - 2003)	$7,8$	$4,9$	$0,8$	0	$1,4$	$3,8$	$6,6$

Źródło: Obliczenia nia podstawe danych z przykładu 2.

Zintepretujemy przyrosty absolutne w przypadku, gdy podstawą porównań jest rok 2000. Zauważymy, że mamy tu do czynienia z wartościami ujemnymi, co oznacza, że w latach 2001-2006 liczby urodzeń były niższe w porównaniu do roku 2000, przy czym np. w roku 2001 wielkość ta była niższa o 10,1 tys., podczas gdy w roku 2003 – aż o 27,2 tys. Przyrosty względne w tym przypadku przyjmują również wartości ujemne. Na przykład przyrost względny dla roku 2003 oznacza, że w tym roku liczba urodzeń spadła o $7,2\%$ w porównaniu do poziomu z roku 2000.

INDEKSY DYNAMIKI

Indeksem dynamiki nazywamy iloraz wielkości badanego zjawiska w dwch porównywanych okresach (momentach).

Indeksy dynamiki dzielimy na:

- indeksy indywidualne oznaczane literą i (inaczej zwane indeksami cząstkowymi),
- indeksy zespołowe oznaczane literą I (inaczej zwane indeksami agregatowymi).

Ten podział indeksów dynamiki odpowiada analogicznemu podziałowi zjawisk na:

- indywidualne, tj. zjawiska jednorodne, które mogą być liczbowo wyrażone w jednakowych jednostkach fizycznych (np. w kilogramach, sztukach, metrach itp.),
- zespołowe, tj. zjawiska niejednorodne, wyrażonych w różnych jednostkach miary.

Indeksy indywidualne

Indywidualnym indeksem dynamiki nazywamy iloraz poziomów badanego zjawiska y_{t_1} oraz y_{t_0} zanotowanych w dwóch okresach (lub momentach) t_1 oraz t_0, czyli

$$i_{t_1|t_0} = \frac{y_{t_1}}{y_{t_0}},$$

gdzie y_{t_1} oznacza poziom zjawiska w okresie (lub momencie) sprawozdawczym t_1, natomiast y_{t_0} oznacza poziom zjawiska w okresie (lub momencie) t_0 uznanym za podstawę porównań. W skrócie indeks ten będziemy zapisywać wzorem

$$i_{1|0} = \frac{y_1}{y_0}.$$

Indeksy indywidualne dzielimy na:

– **jednopodstawowe**, dostarczające oceny dynamiki zjawiska w kolejnych okresach (momentach) czasu w porównaniu do stałego okresu (momentu) przyjętego za podstawę porównań,

– **łańcuchowe**, dostarczające oceny dynamiki zjawisk w kolejnych okresach (momentach) czasu w porównaniu do okresów (momentów) szeregu bezpośrednio poprzedzających.

Jeśli indeksy indywidualne (jednopodstawowe lub łańcuchowe) pomnożymy przez 100%, wówczas otrzymamy indeksy w wyrażeniu procentowym.

Indywidualne indeksy dynamiki (jednopodstawowe lub łańcuchowe) dla konkretnego szeregu czasowego, zestawione w ciąg, dają tzw. szeregi czasowe indeksów.

W przypadku szeregów zawierających łańcuchowe indeksy dynamiki, tj. ciąg indeksów postaci $i_{t_1|t_0}, i_{t_2|t_1}, \ldots, i_{t_n|t_{n-1}}$, można wyznaczać ich średnią wartość, wykorzystując formułę **średniej geometrycznej**

$$G = \sqrt[n]{i_{t_1|t_0} \cdot i_{t_2|t_1} \cdot \ldots \cdot i_{t_n|t_{n-1}}}.$$

Zauważymy, że stopień pierwiastka w podanej formule równy jest liczbie składników (tj. indeksów łańcuchowych) występujących pod pierwiastkiem.

Powyższą formułę można uprościć, korzystając z faktu, że każdy z indeksów łańcuchowych (o ogólnej postaci $i_{t_j|t_{j-1}}$) można zapisać za pomocą następującego ilorazu

$$i_{t_j|t_{j-1}} = \frac{y_{t_j}}{y_{t_{j-1}}}.$$

Mamy zatem

$$G = \sqrt[n]{\frac{y_{t_1}}{y_{t_0}} \cdot \frac{y_{t_2}}{y_{t_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{y_{t_n}}{y_{t_{n-1}}}} = \sqrt[n]{\frac{y_{t_n}}{y_{t_0}}}.$$

Średnia geometryczna z indeksów łańcuchowych mierzy średnie tempo zmian (tj. tempo wzrostu lub spadku) wielkości zjawiska z okresu na okres w badanym przedziale czasowym. Jest zatem wskazane, aby tego rodzaju średnią wyznaczać w odniesieniu do takiego przedziału czasowego, w którym obserwuje się jednokierunkowy charakter zmian badanego zjawiska (tj. albo wzrost, albo spadek).

Przykład 4.

Na podstawie danych z przykładu 2 obliczymy indeksy łańcuchowe oraz indeksy jednopodstawowe dla liczby urodzeń w Polse w latach 2000-2006, przyjmując w tym drugim przypadku za podstawę porównań rok 2000.

lata	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
indeksy łańcuchowe w % (rok poprzedni=100)	–	97,3	96,1	99,2	101,4	102,3	102,7
indeksy jednopodstawowe w % (rok 2000=100)	100	97,3	93,5	92,8	94,1	96,3	98,9

Źródło: Obliczenia nia podstawe danych z przykładu 2.

Zinterpetujemy wybrane dwa indeksy. Indeks jednopodstawowy dla roku 2006 informuje, że w tym roku liczba urodzeń była o $1,1\%$ niższa w porównaniu do liczby urodzeń w roku 2000. Z kolei indeks łańcuchowy dla tego samego roku informuje, że liczba urodzeń była w tym roku o $2,7\%$ wyższa w porównaniu do roku poprzedniego.

Obliczymy jeszcze średnie tempo wzrostu liczby urodzeń w latach 2003–2006, wykorzystując formułę średniej geometrycznej z indeksów łańcuchowych. Mamy

$$G_{2003-2006} = \sqrt[3]{101,4 \cdot 102,3 \cdot 102,7} \approx 102,15\%,$$

co oznacza, że średnie, roczne tempo wzrostu liczby urodzeń w latach 2003–2006 wynosiło ok. $2,15\%$.

Indeksy zespołowe

Tego rodzaju indeksy stosujemy w odniesieniu do zjawisk złożonych, tj. zjawisk będących zespołami (agregatami) zjawisk niejednorodnych, tj. niesumowalnych w jednostkach fizycznych. Przykładem niejednorodnych agregatów mogą być materiały budowlane czy artykuły żywnościowe, w skład których wchodzą towary i produkty wyrażone w różnych jednostkach fizycznych (np. w tonach, sztukach, kilogramach, litrach itp.). Składniki tego rodzaju agregatów nie są więc bezpośrednio sumowalne.

Problem niesumowalności zjawisk złożonych rozwiązuje się najczęściej poprzez wyrażenie wszystkich składników danego agregatu w pewnych wspólnych jednostkach przeliczeniowych, którymi są najczęściej jednostki pieniężne. Przeliczenie agregatu na jednostki pieniężne stanowi punkt wyjścia do wyznaczania tzw. agregatowych indeksów dynamiki (w tym zespołowych indeksów wartości, ilości i cen, omówionych poniżej).

Agregatowy indeks wartości

Niech $j = 1, 2, \ldots, J$ będą numerami produktów, natomiast

$$q_{1t}, q_{2t}, \ldots, q_{Jt}$$

niech będą ilościami tych produktów (masą fizyczną), wchodzących w skład pewnego większego agregatu produktów w okresie (momencie) t. Podobnie, niech

$$p_{1t}, p_{2t}, \ldots, p_{Jt}$$

oznaczają ceny jednostkowe poszczególnych produktów w tym agregacie w okresie (momencie) t.

Jeśli ilości q_{jt} wyrażone są w różnych jednostkach fizycznych, to nie można ich do siebie dodawać, podobnie jak nie można dodawać do siebie ich cen.

W celu przeprowadzenia analizy dynamiki w odniesieniu do tego rodzaju agregatu produktów, konieczne jest sprowadzenie go do sumowalności. Dokonamy tego poprzez przedstawienie danego agregatu w ujęciu wartościowym.

Wartość j-tego składnika (produktu) w badanym agregacie obliczymy, mnożąc jego ilość q_{jt} przez cenę p_{jt} w danym okresie (momencie). Stąd łączna wartość w_t całego agregatu jest równa sumie

$$w_t = \sum_{j=1}^{J} q_{jt} p_{jt}.$$

Aby porównać wartości badanego agregatu w dwóch różnych okresach (momentach) czasu, oznaczonych dalej umownie przez t_1 i t_0, wystarczy podzielić przez siebie wartość agregatu w okresie (momencie) t_1, zwanym okresem lub momentem badanym, przez jego wartość w okresie (momencie) t_0, zwanym okresem lub momentem podstawowym. W ten sposób otrzymujemy **agregatowy indeks wartości**

$$I_w = \frac{w_{t_1}}{w_{t_0}} = \frac{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_1} p_{jt_1}}{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_0} p_{jt_0}}.$$

Dla uproszczenia zapisu indeks ten zapisywać będziemy dalej wzorem skróconym

$$I_w = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}.$$

Zauważymy, że agregatowy indeks wartości jest wypadkową dynamiki ilości i cen produktów wchodzących w skład badanego agregatu produktów. Na jego podstawie nie można więc oddzielnie ocenić wpływu zmian ilości lub wpływu zmian cen na dynamikę wartości tego agregatu. Do tego celu służa tzw. agregatowe indeksy ilości i agregatowe indeksy cen.

Agregatowe indeksy ilości i cen

Podstawą budowy tych indeksów jest tzw. **metoda standaryzacji indeksowej** polegająca na tym, że w agregatowym indeksie wartości I_w, przedstawionym powyżej jeden ze składników sumy występującej w liczniku i mianowniku wzoru (a więc ceny lub ilości produktów) są ustalane na stałym poziomie w obu porównywanych okresach (momentach), tzn. przyjmuje się albo stałe ceny, albo stałe ilości dla każdego z produktów w obu porównywanych okresach. Dzięki temu możliwe jest określenie wpływu drugiego z tych składników na zmiany w wartości badanego agregatu.

Jeśli czynnikiem ustalonym na stałym poziomie będą ceny produktów, to w efekcie otrzymamy indeks informujący o tym, jaki wpływ na dynamikę wartości badanego agregatu miały zmiany w ilościach produktów zawartych w tym agregacie. Z tego powodu indeks ten nazywamy **agregatowym indeksem ilości**.

Istnieją dwie formuły definiujące agregatowy indeks ilości: **Paaschego** i **Laspeyresa**. W pierwszej z nich przyjmuje się stałe ceny na poziomie z okresu badanego, a w drugiej – na poziomie z okresu podstawowego.

Formuła Paaschego:

$$ {}_{P}I_q = \frac{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_1} p_{jt_1}}{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_0} p_{jt_1}}, \quad \text{w skrócie} \quad {}_{P}I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}, $$

Formuła Laspeyresa:

$$ {}_{L}I_q = \frac{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_1} p_{jt_0}}{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_0} p_{jt_0}}, \quad \text{w skrócie} \quad {}_{L}I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}. $$

W podobny sposób konstruujemy **agregatowe indeksy cen**, tzn. przyjmujemy, że ilości produktów w danym agregacie są na stałym poziomie w obu porównywanych okresach (momentach).
Formuła Paaschego:

$$ {}_{P}I_p = \frac{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_1} p_{jt_1}}{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_1} p_{jt_0}}, \quad \text{w skrócie} \quad {}_{P}I_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}, $$

Formuła Laspeyresa:

$$ {}_{L}I_p = \frac{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_0} p_{jt_1}}{\sum_{j=1}^{J} q_{jt_0} p_{jt_0}}, \quad \text{w skrócie} \quad {}_{L}I_p = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0}. $$

Ze względu na fakt, że w indeksach Paaschego i Laspeyresa ustala się ceny bądź ilości na stałych poziomach, ale z różnych okresów (momentów), indeksy te na ogół różnią się, czyli

$$ {}_{L}I_p \neq {}_{P}I_p, \quad {}_{L}I_q \neq {}_{P}I_q. $$

Między agregatowymi indeksami wartości, ilości i cen zachodzi jednak związek określany mianem **równości indeksowej**

$$ I_w = {}_{L}I_p \cdot {}_{P}I_q = {}_{P}I_p \cdot {}_{L}I_q. $$

Ze względu na przyjmowane założenie o stałości cen lub ilości w danym agregacie produktów, interpretacji tych indeksów dokonuje się najczęściej z użyciem trybu warunkowego.

Indeksy ilości (indeksy cen) wg formuły Paaschego informują, o ile zmieniłaby się, tj. wzrosła lub spadła, wartość całego agregatu produktów w porównywanych okresach, gdyby ceny (ilości) produktów były stałe na poziomie z **okresu badanego**.

Indeksy ilości (indeksy cen) wg formuły Laspeyresa informują, o ile zmieniłaby się, tj. wzrosła lub spadła, wartość całego agregatu produktów w porównywanych okresach, gdyby ceny (ilości) produktów były stałe na poziomie z **okresu podstawowego**.